Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas

Birreductos con igualdades y similaridades en sistemas de información y decisión

María José Benítez Caballero

Tutor: Prof. Dr. Jesús Medina Moreno

Trabajo de Investigación presentado para optar al grado académico de Máster en Matemáticas
Curso académico 2013-2014

Índice general

Capítulo 1

Introducción

Los conjuntos difusos [34], introducidos por Lofti Zaded, y los conjuntos rugosos, propuestos por Pawlak [26], son enfoques complementarios para tratar el conocimiento imperfecto: mientras que los primeros permiten que los elementos pertenezcan a un conjunto con un cierto grado de verdad dado, los otros proporcionan aproximaciones de conceptos cuando la información disponible es incompleta. Concretamente, si se carece de toda la información de un conjunto, éste se representa mediante un par de conjuntos, que son la aproximación inferior y la aproximación superior del conjunto.

Aunque en la versión original propuesta por Pawlak, las aproximaciones consideradas eran conjuntos clásicos, pronto se iban a introducir nuevas variantes en las que las aproximaciones podían ser conjuntos difusos. Una primera definición de los conjuntos rugosos difusos se dio en los ochenta [11], y después de ésta se han introducido numerosos modelos híbridos, por ejemplo [23, 24, 25, 27].

Apostando por la idea original de Pawlak en un ambiente más general, en el que las aproximaciones se realizan sobre conjuntos distintos, uno de objetos y otro de atributos, como en el análisis formal de conceptos, Düntsch and Gediga en [10, 13] presentaron los retículos de conceptos orientados a propiedades ("property-oriented concept lattice", en inglés). Esta teoría en el ambiente clásico ha sido utilizada y desarrollada en numerosos trabajos [3, 9] y también desde el punto de vista de conjuntos difusos en [7, 14, 15]. Este caso especial de retículos de conceptos se ha enriquecido considerando la filosofía multi-adjunta [21, 20, 19].

A pesar de que este enfoque es más general que los dados sobre conjuntos rugosos difusos, al considerar dos conjuntos, el de objetos y el de atributos, se difumina el objetivo inicial de aproximar un conjunto mediante sus aproximaciones inferiores y superiores, lo cual es importante en distintas aplicaciones. Es por esto la necesidad de estudiar también propiamente las extensiones de los conjuntos rugosos difusos [6].

Está ampliamente demostrada la bonanza de este tipo de técnicas matemáticas, en la extracción y manipulación de información en bases de datos relacionales con información imprecisa, falta o pérdida de información.

Una parte muy importante es la reducción del tamaño de la base de datos a tratar, sin perder información ni elementos de juicio, con este objetivo se presentaron los reductos [5, 16, 22, 26, 30].

Recientemente han adquirido una gran importancia el estudio de los birreductos [18, 28], los cuales contienen a los reductos y aportan más información reduciendo el sistema original sin incluir incoherencias y eliminando el posible ruido existente en los datos originales.

El trabajo realizado se centra en el estudio de los birreductos para simplificar la manipulación de información en la teoría de los conjuntos rugosos. El objetivo principal de los birreductos es el de reducir el sistema original evitando que aparezcan incompatibilidades. Como consecuencia, se obtienen subsistemas más sencillos con los que tratar y obtener resultados coherentes y extrapolables al sistema original.

La obtención de los birreductos en un ambiente en el que además se consideren relaciones de similaridad, es más complejo y, a su vez, más importante y aplicable. De lo cual, podemos deducir su dificultad y su importancia. En este trabajo se ha estudiado, además del caso clásico, la obtención de los birreductos en ambientes en los que se ha debilitado la noción de igualdad por la de similaridad, obteniendo interesantes y novedosos resultados.

La teoría desarrollada se puede aplicar en ejemplos como el siguiente que nos puede servir a modo de ilustración. Para llevar a cabo la compra de una casa debemos considerar una serie de características, algunas de ellas son indispensables para realizar la compra en función del comprador, como por ejemplo el número de habitaciones o su distribución dentro del inmueble; otras ayudarán a la toma de decisión, como por ejemplo las vistas de la terraza o los comercios e instituciones del barrio; y otras no influirán en la compra, como el número de ventanas que tenga la casa. A lo largo del trabajo veremos que siempre le ponemos un apellido a los conceptos matemáticos a utilizar: de información y de decisión. Los sistemas y tablas de información realizan una clasificación de los objetos en función de una serie de atributos, mientras que los sistemas y tablas de decisión introducen una columna en la cual se determina una acción a realizar dependiendo de los atributos que tenga cada uno de los objetos. En el caso de la compra del inmueble, el vendedor poseería la tabla de información mientras que el comprador realizaría una tabla de decisión.

Pero claro, para que ambas tablas sean útiles y factibles deben ser coherentes (no tener incompatibilidades) y lo más simplificadas posibles. Es decir, en el caso de una tabla de decisión, no deben existir contradicciones entre objetos. Por ejemplo, consideremos una tabla de decisión en la que se describe los síntomas que padecen un grupo de personas y cuya columna de decisión es si tienen gripe o no. En este caso no podemos tener dos personas que presentando las mismas patologías una tenga la gripe y otra no, es decir, no nos podemos encontrar con las siguientes filas:

U	Fiebre	Tos	Sudoración	Mucosidad	Gripe
2	Alta	Sí	Media	Sí	Sí
5	Alta	Sí	Media	Sí	No

Capítulo 2

Nociones básicas de lógica proposicional

En este capítulo vamos a recordar la *lógica proposicional*, también llamada *lógica clásica*, que es una de las lógicas más sencillas. Ésta será necesaria para interpretar la función de discernibilidad considerada en la teoría de conjuntos difusos.

Comenzaremos presentando dos aspectos importantes:

1. El lenguaje de la lógica proposicional

2. La semántica de la lógica proposicional

Un lenguaje consta de un alfabeto de símbolos y de la definición de un conjunto de cadenas de símbolos de dicho alfabeto llamadas *fórmulas bien formadas*.

El tipo más simple de lenguaje lógico es el que corresponde a la lógica clásica proposicional la cual, a fin de establecer criterios sobre la exactitud de razonamientos, formaliza la parte más elemental de nuestro lenguaje natural, del modo más simple. Concretamente:

1. Considera solo las frases declarativas, llamadas *proposiciones* o *enunciados*, a las que es posible asignar un valor de verdad o falsedad y ningún otro, es decir, es *bivaluada*, quedando este valor completamente determinado por el valor de verdad o falsedad de los enunciados simples que la componen y las partículas *no, o, y , si ... entonces* y *si y sólo si*, utilizadas como elementos de enlace.

2. La asignación de valores de verdad o falsedad a los enunciados se realiza sin recurrir a consideraciones de contexto alguno y sin considerar la estructura interna de los enunciados simples.

Podemos destacar dos principios relevantes de la lógica proposicional:

1. **Principio de contradicción**: Un enunciado nunca es verdadero y falso a la vez.

2. **Principio del tercero excluido**: Un enunciado es verdadero o falso; no existe una tercera posibilidad.

2.1. El lenguaje de la lógica proposicional

Si bien la lógica clásica proposicional no basta para la especificación y análisis de requerimientos de sistemas complejos, sí es suficiente en el caso de sistemas relativamente pequeños: la simplicidad de esta lógica permite especificaciones concisas, eliminar con facilidad las posibles contradicciones introducidas en un primer intento de especificación, clarificar y eliminar ambigüedades y razonar fácilmente sobre el sistema.

Definición 2.1.1. El lenguaje, $\mathcal{L}$, de la lógica proposicional clásica se define como sigue:

1. **Alfabeto**: El alfabeto $\mathcal{A}$ consta de:

   a) Un conjunto numerable de símbolos o variables proposicionales

   $$\mathcal{V} = \{p, q, r \ldots, p_1, q_2, r_2, \ldots, p_n, q_n, r_n, \ldots\}$$

   Con estos símbolos representamos las frases simples del lenguaje natural. En cada frase intervendrán únicamente un número finito de este conjunto de símbolos proposicionales. La razón para considerar este conjunto infinito es que el número de frases simples que pueden intervenir en un razonamiento no es limitado.

   b) Los símbolos de constantes $\top$ y $\bot$.

   c) Los símbolos $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$ y $\leftrightarrow$, llamados *conectivas* u *operadores lógicos*.

   d) Los símbolos de puntuación "(", ")".

2. **Fórmulas bien formadas de $\mathcal{L}$**(FBF): El lenguaje $\mathcal{L}$ es la cláusura inductiva libremente generada del conjunto base $\mathcal{V} \cup \{\top, \bot\}$ para los constructores $C_\neg, C_\wedge, C_\vee, C_\rightarrow$ y $C_\leftrightarrow$ definidos como sigue: Para dos cadenas X e Y cualesquiera del alfabeto a, definimos:

$$\begin{array}{rcl} C_\neg(X) & = & \neg X \\ C_\wedge(X, Y) & = & (X \wedge Y) \\ C_\vee(X, Y) & = & (X \vee Y) \\ C_\rightarrow(X) & = & (X \rightarrow Y) \\ C_\leftrightarrow(X) & = & (X \leftrightarrow Y) \end{array}$$

$\top$ se lee "verdad" y $\bot$ se lee "falsedad" y, si A y B son FBFs,

- $\neg A$ se lee "no A" y se llama *negación* de A.
- $A \wedge B$ se lee "A y B" y se llama *conjunción* de A y B.
- $A \vee B$ se lee "A o B" y se llama *disyunción* de A y B.
- $A \rightarrow B$ se lee "Si A entonces B" y se llama *implicación material* con antecedente A y consecuente B.
- $A \leftrightarrow B$ se lee "A si y sólo si B" y se llama *biimplicación material* de A y B.

Usualmente, la definición de las FBFs de $\mathcal{L}$ se presenta en términos menos formales como sigue:

El conjunto de la FBFs es el conjunto de cadenas sobre el alfabeto dado, $\mathcal{A}$, determinado por las siguientes condiciones:

1. Los símbolos de proposición (elementos de $\mathcal{V}$) son *FBFs atómicas*.

2. $\top$ y $\perp$ son FBFs.

3. Si A es una FBF entonces $\neg A$ es una FBF.

4. Si A y B son FBFs entonces $(A \wedge B), (A \vee B), (A \rightarrow B)$ y $(A \leftrightarrow B)$ son FBFs.

5. Sólo las cadenas obtenidas aplicando las reglas anteriores son FBFs.

Los símbolos A y B usados en la definición de FBFs no son símbolos del lenguaje sino *metasímbolos*, es decir, símbolos para hablar acerca del lenguaje. Por lo tanto, las expresiones $\neg A, (A \rightarrow B), (A \wedge B), \ldots$ no son FBFs sino "esquemas de FBFs".

En la práctica, se aceptan diversos convenios. Entre ellos, el más sencillo es el de omitir los paréntesis inicial y final de toda FBF. Así pues, escribiremos $A \rightarrow B$, $A \wedge B$, etc. en lugar de $(A \rightarrow B)$, $(A \wedge B)$, etc.

A cotinuación, vamos a presentar tres leyes de la Lógica Clásica Proposicional que serán la que utilizaremos en un futuro. La tabla donde se presentan las leyes de la lógica clásica proposicional la podemos encontrar en [1]. Dichas leyes son:

Leyes asociativas	$(A \wedge B) \wedge C \equiv A \wedge (B \wedge C)$ $(A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C)$
Leyes distributivas	$A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
Leyes de absorción	$A \wedge (A \vee B) \equiv A$ $A \vee (A \wedge B) \equiv A$

Las leyes asociativas nos permiten dar categoría de FBF a las expresiones

$$A_1 \vee A_2 \vee \cdots \vee A_n \quad \text{abreviadamente} \quad \bigvee_{i=1}^{n} A_i$$

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n \quad \text{abreviadamente} \quad \bigwedge_{i=1}^{n} A_i$$

Cada una de ellas representa una cualquiera de las FBFs (equivalentes entre sí) que se obtiene intercalando paréntesis de modo conveniente.

Vamos, ahora, a definir unas representaciones de las FBFs que son realmente útiles. Para ello primero necesitamos la siguiente definición:

Definición 2.1.2. 1. Los símbolos proposicionales, junto con sus negaciones son llamados *literales*. Decimos que los literales p y $\neg p$ son *literales opuestos*. En este trabajo, si l es un literal, denotaremos su opuesto por $\bar{l}$.

2. Una FBF se dice que es un *cubo* si es $\top$, $\bot$, un literal o una conjunción (posiblemente vacía) de literales. Decimos que es un *cubo restringido* si no contiene literales repetidos ni pares de literales opuestos.

3. Una FBF se dice que es una *cláusula* si es $\top$, $\bot$, un literal o una disyunción (posiblemente vacía) de literales. Decimos que es una *cláusula restringida* si no contiene literales repetidos ni pares de literales opuestos.

2.2. Formas Normales Disyuntivas y Conjuntivas

Para las FBFs existen dos representantes canónicos cuyo significado es simple. Sea cual sea la complejidad de una FBF, podemos obtener una FBF equivalente de profundidad, a lo sumo, dos. Más aún, existen dos FBFs equivalentes con esta característica, las cuales se definen a continuación:

Definición 2.2.1. 1. Una FBF se dice que es *normal disyuntiva* (FND) si es:

- $\top$
- $\bot$
- un cubo, o
- una disyunción (probablemente vacía) de cubos.

2. Una FBF se dice que es *normal conjuntiva* (FNC) si es:

- $\top$
- $\bot$
- un cláusula, o
- una conjunción (probablemente vacía) de cláusulas.

Las formas normales anteriores pueden reducirse utilizando las leyes de absorción hasta que no se pueden reducir más, obteniendo las formas reducidas:

Definición 2.2.2. Una FND se dice *restringida* (abreviadamente, FNDR), si cumple los siguientes requisitos:

- Ningún cubo contiene un literal y su opuesto.
- Ningún cubo contiene literales repetidos.
- Ningún cubo contiene a otro.

Una FNC se dice *restringida* (abreviadamente, FNCR), si cumple los siguientes requisitos:

- Ningún cláusula contiene un literal y su opuesto.
- Ningún cláusula contiene literales repetidos.
- Ningún cláusula contiene a otro.

Las definiciones previas serán fundamentales para introducir y manejar la función de discernibilidad que se utiliza en la teoría de conjuntos rugosos y que se generalizará en este trabajo al considerar relaciones de similaridad.

Capítulo 3

Conjuntos rugosos

Los conjuntos rugosos los introdujo por Zdzislaw Pawlak [26] en los ochenta y son muy útiles cuando se manejan bases de datos con información insuficiente o incompleta. La idea básica es construir una aproximación superior e inferior de un subconjunto dado X dentro de un universo U, cuyos elementos se llaman objetos, obtenido mediante una relación binaria de discernibilidad R en U, la cual indica cuánto de distintos son dos objetos dados de U. Puesto que las bases de datos son finitas, se asume que el universo U es un conjunto no vacío y finito.

Queremos estudiar si un elemento $x \in U$ es discernible por los elementos en A. Esta decisión está basada en una relación de indiscernibilidad R en el universo U ($R \subseteq U \times U$). Las definiciones de las aproximaciones superiores e inferiores en el conjunto A dependerá de la relación R. Al par (U, R) se denomina *espacio de aproximación*. Pawlak estudió dichas aproximaciones considerando una relación de equivalencia. Aunque, esta teoría es fácilmente generalizable mediante relaciones binarias más generales [].

3.1. Definiciones básicas

Cuando la relación R es una relación de equivalencia, llamamos al par (U, R) un *espacio de aproximación de Pawlak*.

Definición 3.1.1. Una relación de equivalencia R en el conjunto U es un subconjunto del producto cartesiano $U \times U$ cumpliendo las siguientes propiedades:

1. Reflexiva, es decir, para todo $x \in U$ obtenemos que $(x, x) \in R$.

2. Simétrica, por lo tanto, para todo $x, y \in U$ se satisface que $(x, y) \in R \Leftrightarrow (y, x) \in R$.

3. Transitiva, es decir, para todo $x, y, z \in U$ se cumple que si $(x, y) \in R$ y $(y, z) \in R$ entonces $(x, z) \in R$.

Para $x \in U$, denominados *clase de equivalencia de x con respecto a R* al subconjunto de U:

$$[x]_R = \{y \in U \mid (x, y) \in R\}$$

A continuación, vamos a definir las aproximaciones superiores e inferiores del conjunto A para un espacio de aproximación de Pawlak (U, R)

Definición 3.1.2. Sea X un subconjunto de U, R una relación de equivalencia en U y $x \in U$. Se define la *aproximación inferior* $R{\downarrow}X$ de X como:

$$\begin{aligned} x \in R{\downarrow}X &\Leftrightarrow [x]_R \subseteq X \\ &\Leftrightarrow \text{Para todo } y \in U, \text{ si } (x,y) \in R \text{ entonces } y \in X \end{aligned}$$

y la *aproximación superior* $R{\uparrow}X$ de X como:

$$\begin{aligned} x \in R{\uparrow}X &\Leftrightarrow [x]_R \cap X \neq \emptyset \\ &\Leftrightarrow \text{Si existe } y \in U, \text{ tal que } (x,y) \in R, y \in X \end{aligned}$$

Es decir, que la aproximación inferior de X contiene a x si y sólo si su clase de equivalencia $[x]_R$ está contenida en X. Por otro lado, la aproximación superior de X contiene a x si y sólo si su clase de equivalencia $[x]_R$ tiene una intersección no vacía con el conjunto X. Lo cual significa que la aproximación inferior es un conjunto de elementos que necesariamente satisface el concepto, la característica o el atributo que propone X (es decir, una pertenencia fuerte) y la aproximación superior es el conjunto de elementos que posiblemente satisfagan el concepto X (por lo tanto, es una pertenencia débil). Ambos, tanto la aproximación superior como la inferior, son subconjuntos de U.

Proposición 3.1.1. *Sean X y Y dos subconjuntos de U y R una relación de equivalencia en U. La siguiente tabla muestra las propiedades que las relacionan.*

Nombre	**Propiedad**
Dualidad	$R{\downarrow}X = (R{\uparrow}X^c)^c$ $R{\uparrow}X = (R{\downarrow}X^c)^c$
Inclusión	$R{\downarrow}X \subseteq X$ $X \subseteq R{\uparrow}\, X$
Monotonía de los conjuntos	$X \subseteq Y \Rightarrow R{\downarrow}X \subseteq R{\downarrow}Y$ $X \subseteq Y \Rightarrow R{\uparrow}X \subseteq R{\uparrow}Y$
Monotonía de las relaciones	$R_1 \subseteq R_2 \Rightarrow R_2{\downarrow}X \subseteq R_1{\downarrow}X$ $R_1 \subseteq R_2 \Rightarrow R_1{\uparrow}X \subseteq R_2{\uparrow}X$
Intersección	$R{\downarrow}(X \cap Y) = R{\downarrow}X \cap R{\downarrow}\, Y$ $R{\uparrow}(X \cap Y) \subseteq R{\uparrow}X \cap R{\uparrow}Y$
Unión	$R{\downarrow}(X \cup Y) \supseteq R{\downarrow}X \cup R{\downarrow}Y$ $R{\uparrow}(X \cup Y) = R{\uparrow}X \cup R{\uparrow}Y$
Idempotencia	$R{\downarrow}(R{\downarrow}X) = R{\downarrow}X$ $R{\uparrow}(R{\uparrow}X) = R{\uparrow}X$
Conjuntos vacío y total	$R{\downarrow}\emptyset = \emptyset = R{\uparrow}\emptyset$ $R{\downarrow}U = U = R{\uparrow}U$

Cuadro 3.1: Propiedades de un espacio de aproximación de Pawlak

donde X^c representa el conjunto complementario de X.

Demostración. Todas las propiedades se obtienen directamente de la definición de los operadores aproximación superior e inferior. □

3.2. Conexiones de Galois isótonas

En esta sección vamos a probar que los operadores aproximación superior e inferior forman una conexión de Galois isótona, la cual es una definición "dual" de la conexión de Galois clásica.

Primeramente, introducimos la definición clásica de conexión de Galois.

Definición 3.2.1. Dados los conjuntos parcialmente ordenados (posets) $(P_1, \leq_1)$, $(P_2, \leq_2)$ y las aplicaciones ${}^{\downarrow}\colon P_1 \to P_2$, ${}^{\uparrow}\colon P_2 \to P_1$, decimos que $({}^{\uparrow}, {}^{\downarrow})$ forman una *conexión de Galois* entre P_1 y P_2 si:

1. ${}^{\downarrow}$ y ${}^{\uparrow}$ son decrecientes.

2. $p_1 \leq_1 {p_1}^{\downarrow\uparrow}$ para todo $p_1 \in P_1$.

3. $p_2 \leq_2 {p_2}^{\uparrow\downarrow}$ para todo $p_2 \in P_2$.

Si en vez de ser aplicaciones decrecientes, las aplicaciones son monótonas crecientes, entonces se llama *conexión de Galois isótona* o también llamada *par residuado.*

Definición 3.2.2. Dados los conjuntos parcialmente ordenados $(P_1, \leq_1)$ y $(P_2, \leq_2)$, y las aplicaciones ${}^{\downarrow}\colon P_1 \to P_2$, ${}^{\uparrow}\colon P_2 \to P_1$, el par $({}^{\uparrow}, {}^{\downarrow})$ forma una *conexión de Galois isótona* entre P_1 y P_2 si:

1. ${}^{\uparrow}$ y ${}^{\downarrow}$ conservan el orden.

2. $x \leq_1 x^{\downarrow\uparrow}$, para todo $x \in P_1$.

3. $y^{\uparrow\downarrow} \leq_2 y$, para todo $y \in P_2$.

En función del contexto podemos usar una u otra versión, observando que, desde un punto de vista teórico, no hay mucha diferencia entre ambas, pues podemos pasar de una en la otra considerando el dual de uno de los dos conjuntos parcialmente ordenados, por ejemplo, 2^B por $(2^B)^\partial$.

Proposición 3.2.1. *Las aproximaciones inferior y superior forman una conexion de Galois isótona.*

Definición 3.2.3. Dado un poset $(P, \leq)$, $c\colon P \to P$ es un *operador de clausura* si es creciente, $x \leq c(x)$ y $c(c(x)) = c(x)$, para todo $x \in P$.

En este caso, las composiciones no son siempre operadores de clausura sino que pueden ser operadores interiores.

Definición 3.2.4. Dado un poset $(P, \leq)$, $\mathrm{int}\colon P \to P$ es un *operador interior* si es creciente, $\mathrm{int}(x) \leq x$ y $\mathrm{int}(\mathrm{int}(x)) = \mathrm{int}(x)$, para todo $x \in P$.

Proposición 3.2.2. *Si $({}^{\uparrow}, {}^{\downarrow})$ es una conexión de Galois isótona, entonces ${}^{\uparrow\downarrow}\colon P_2 \to P_2$ es un operador interior y ${}^{\downarrow\uparrow}\colon P_1 \to P_1$ un operador de clausura.*

3.3. Generalización de las aproximaciones inferior y superior

Esta sección introduce tres operadores nuevos que se han considerado en distintos campos: análisis de datos cualitativos [10, 13], teoría de conjuntos rugosos [33], teoría de conjuntos rugosos difusos [2, 17], etc. Más ejemplos y aplicaciones se pueden encontrar en [8, 14, 15, 27, 31].

Dados los conjuntos A, B, y una relación $R\colon A \times B \to \{0,1\}$, consideramos las aplicaciones ${}^{\uparrow_\pi}\colon 2^B \to 2^A$, ${}^{\uparrow_N}\colon 2^B \to 2^A$ definidas, para cada $X \subseteq B$, como:

$$
\begin{aligned}
X^{\uparrow_\pi} &= \{a \in A \mid \text{ existe } b \in X, \text{ tal que } aRb\} && (3.1)\\
X^{\uparrow_N} &= \{a \in A \mid \text{ para todo } b \in B, \text{ si } aRb, \text{ entonces } b \in X\} && (3.2)
\end{aligned}
$$

Es fácil demostrar que $X^{\uparrow_\pi} = \bigcup_{b \in X} \{b\}^{\uparrow_\pi}$.

Análogamente, se definen las aplicaciones ${}^{\downarrow^\pi}\colon 2^A \to 2^B$ y ${}^{\downarrow^N}\colon 2^A \to 2^B$.

Estos operadores se llaman *posibilidad* y *necesidad*, respectivamente; el operador clásico de derivación se llama en estos ambientes *operador de suficiencia*. Estos operadores se componen para formar conexiones de Galois u operadores de clausura o interiores [12, 29, 32, 3, 13, 10]. Como consecuencia, varios entornos de retículos de conceptos se pueden definir, *el retículo de conceptos formal clásico*, $\mathfrak{B}(A,B,R)$, *retículo de conceptos formal dual*, $\mathfrak{B}_d(A,B,R)$, *retículo de conceptos orientado a propiedades*, $L_p(A,B,R)$, y *retículo de conceptos orientado a objetos*, $L_o(A,B,R)$ [3].

El par $({}^{\uparrow_N}, {}^{\downarrow^\pi})$ es una conexión de Galois isótona y un *concepto orientado a objetos* es un par (X,Y), con $X \subseteq B$, $Y \subseteq A$, tal que $X = Y^{\downarrow^\pi}$ y $Y = X^{\uparrow_N}$. El conjunto de conceptos orientados a objetos se denota como $L_o(A,B,R)$ y forma un retículo completo [31], con los operadores ínfimo $\wedge$ y supremo $\vee$, definidos, para cada $(X_1,Y_1),(X_2,Y_2) \in L_o(A,B,R)$, como sigue:

$$
\begin{aligned}
(X_1,Y_1) \wedge (X_2,Y_2) &= ((Y_1 \wedge Y_2)^{\downarrow^\pi}, Y_1 \wedge Y_2)\\
(X_1,Y_1) \vee (X_2,Y_2) &= (X_1 \vee X_2, (X_1 \vee X_2)^{\uparrow_N})
\end{aligned}
$$

Un *concepto orientado a propiedades* se obtiene a partir de la conexión de Galois isótona $({}^{\downarrow^N}, {}^{\uparrow_\pi})$ y es un par (X,Y), con $X \subseteq B$, $Y \subseteq A$, tal que $X = Y^{\downarrow^N}$ y $Y = X^{\uparrow_\pi}$. El conjunto de conceptos orientados a propiedades se escribe como $L_p(A,B,R)$ y es un retículo completo [13], con los operadores ínfimo $\wedge$ y supremo $\vee$, definidos, para cada $(X_1,Y_1),(X_2,Y_2) \in L_p(A,B,R)$, como:

$$
\begin{aligned}
(X_1,Y_1) \wedge (X_2,Y_2) &= (X_1 \wedge X_2, (X_1 \wedge X_2)^{\uparrow_\pi})\\
(X_1,Y_1) \vee (X_2,Y_2) &= ((Y_1 \vee Y_2)^{\downarrow^N}, Y_1 \vee Y_2)
\end{aligned}
$$

Estos operadores están relacionados. Por tanto, estos operadores no son independientes y los retículos de conceptos que se obtienen a partir de ellos están relacionados.

Los operadores necesidad y posibilidad también se relacionan con el operador suficiencia (derivación). Específicamente, dado un contexto (A,B,R), el retículo de conceptos formal que se considera para realizar la relación es $\mathfrak{B}(A,B,R^c)$, dónde R^c es la relación complementaria de R, y la conexión de Galois se escribirá en este caso como $({}^{\uparrow_c}, {}^{\downarrow^c})$. Por lo tanto, fijados los retículos de conceptos $\mathfrak{B}(A, B, R^c)$, $L_o(A, B, R)$ y $L_p(A, B, R)$, y dados $X \subseteq B$, $Y \subseteq A$, se obtienen las siguientes igualdades:

$$\begin{array}{rr} (X^c)^{\uparrow_N} = X^{\uparrow_c} & \quad (Y^c)^{\downarrow^N} = Y^{\downarrow^c} \\ (X^{\uparrow_\pi})^c = X^{\uparrow_c} & \quad (Y^{\downarrow^\pi})^c = Y^{\downarrow^c} \end{array}$$

Como consecuencia, por ejemplo, $X^{\uparrow_c\downarrow^c} = ((X^{\uparrow_\pi})^c)^{\downarrow^c} = (((X^{\uparrow_\pi})^c)^c)^{\downarrow^N} = X^{\uparrow_\pi\downarrow^N}$, y $Y^{\downarrow^c\uparrow_c} = ((Y^{\downarrow_\pi})^c)^{\uparrow^c} = (((Y^{\downarrow_\pi})^c)^c)^{\uparrow^N} = Y^{\downarrow^\pi\uparrow_N}$.

Por lo tanto, estas igualdades nos dan la guía para relacionar los tres retículos de conceptos, con lo que cualquier resultado demostrado en uno de estos retículos de conceptos tiene su correspondiente traducción en los otros.

Capítulo 4

Reductos y birreductos de información

En bases de datos grandes es muy importante reducir el tamaño de éstas sin perder información. Con este objetivo aparecen los reductos, los cuales aportan subsistemas que conserva íntegramente la potencialidad y cobertura del sistema original, eliminando información redundante o que se puede obtener a partir del subsistema obtenido.

Recientemente se ha observado la necesidad de considerar otro tipo de subsistemas, los cuales sí eliminan información del sistema original, pero son como pequeños "ecosistemas" del original en los que se eliminan posibles incompatibilidades y sobre los que es mucho más fácil obtener información.

4.1. Conceptos previos.

Al aplicar la teoría de conjuntos rugosos en sistemas de datos relacionales, surgen nuevos conceptos, como el de objetos, características o atributos, sistema de información y relación de indescirnibilidad, los cuales introducimos a continuación.

Definición 4.1.1. Denominamos **sistema de información** a la tupla

$$S = (U, A, \{V_a \mid a \in A\}, \{I_a \mid a \in A\})$$

donde U es un conjunto finito y no vacío de objetos, A otro conjunto finito y no vacío de atributos, V_a es un conjunto de valores para cada atributo $a \in A$ y, por último, $I_a : U \to V_a$ es una función que a cada objeto le asigna uno y sólo un valor de V_a.

Los sistemas de información se representan también como una tabla que relaciona los objetos y atributos, que se llama **tabla de información**. Considerando tal tabla y con el fin de simplificar la notación, se suelen denotar a los sistemas de información simplemente como: $\mathbb{A} = (U, A)$.

Ejemplo 1. Vamos a considerar sistema de información en el que a, b, c, d y e representan la temperatura, humedad, viento, fertilizante y pesticida, respectivamente, de siete invernaderos diferentes, y que viene representado por la siguiente tabla de información:

	a	b	c	d	e
1	high	middle	middle	fert 1	pes1
2	middle	middle	middle	fert 2	pes1
3	middle	high	weak	fert 1	pes2
4	middle	high	middle	fert 1	pes1
5	low	middle	strong	fert 1	pes1
6	high	middle	middle	fert 3	pes2
7	high	high	middle	fert 1	pes2

Vamos a definir cada una de las características representadas en la tabla de información. El cardinal del conjunto de objetos es 7 y el conjunto de atributos está formado por los cinco atributos descritos anteriormente. Veamos ahora cuáles son los conjuntos de valores de cada uno de los atributos:

$$V_a = \{high, middle, low\} \qquad V_d = \{fert1, fert2, fert3\}$$
$$V_b = \{high, middle\} \qquad V_e = \{pes1, pes2\}$$
$$V_c = \{strong, middle, weak\}$$

Por último, vamos a describir las funciones que a cada uno de los objetos le asigna uno, y sólo uno, de los valores que pueden tomar cada uno de los atributos.

$I_a \colon U \to V_a$
$I_a(1) = I_a(6) = I_a(7) =$ high
$I_a(2) = I_a(3) = I_a(4) =$middle
$I_a(5) =$ low

$I_b \colon U \to V_b$
$I_b(3) = I_b(4) = I_b(7) =$ high
$I_b(1) = I_b(2) = I_b(5) = I_b(6) =$middle

$I_c \colon U \to V_c$
$I_c(5) =$ strong
$I_c(1) = I_c(2) = I_c(4) = I_c(6) = I_c(7) =$middle
$I_c(3) =$weak

$I_d \colon U \to V_d$
$I_d(1) = I_d(3) = I_d(4) = I_d(5) = I_d(7) =$ fert1
$I_d(2) =$ fert 2
$I_d(6) =$ fert 3

$I_e \colon U \to V_e$; $I_e(1) = I_e(2) = I_e(4) = I_e(5) =$ pes1, $I_e(3) = I_e(6) = I_e(7) =$ pes2

Definición 4.1.2. Sea un subconjunto $B \subseteq A$, una **relación de indiscernibilidad** $Ind(B) \subseteq U \times U$ se define como sigue:

$$Ind(B) = \{(i,j) \in U \times U \mid \text{para todo } a \in B, I_a(i) = I_a(j)\}$$

Es decir, para cada dos objetos $i, j \in U$, si $(i, j) \in Ind(B)$, entonces i y j son indiscernibles con respecto a los atributos pertenecientes al subconjunto B.

4.2. Reductos de información.

En esta sección introducimos los reductos en sistemas de información.

Definición 4.2.1. Dada una tabla de información, un subconjunto de atributos $B \subseteq A$ se denomina **reducto de información** si B satisface las siguientes dos condiciones:

1. $Ind(B) = Ind(A)$.

2. Para cualquier $a \in B$, $Ind(B - \{a\}) \neq Ind(A)$.

Definición 4.2.2. Dada una tabla de información, su **matriz de discernibilidad** $M = (M(i,j))$ es una matriz de tamaño $|U| \times |U|$, donde el elemento $M(i,j)$ para cada par de objetos (i,j) se define del siguiente modo:

$$M(i,j) = \{a \in A \mid I_a(i) \neq I_a(j)\}$$

Por tanto, lo que nos indica cada uno de las componentes de la matriz de discernibilidad, $M(i,j)$, es que los objetos i y j pueden ser distinguidos por cualquier atributo de $M(i,j)$. Consecuentemente, los objetos del par (i,j) pueden distinguirse si $M(i,j) \neq \emptyset$. Claramente, la matriz de discernibilidad es simétrica, es decir, $M(i,j) = M(j,i)$. Por la relación de discernibilidad, obtenemos directamente que $M(i,i) = \emptyset$, para todo $i \in U$. Por lo tanto, es necesario estudiar únicamente la parte inferior o superior de la matriz.

Por la definición de la relación de indiscernibilidad y la matriz de discernibilidad, obtenemos que:

$$\begin{array}{rcl} (i,j) \in Ind(\{a\}) & \Leftrightarrow & a \notin M(i,j) \\ (i,j) \in Ind(B) & \Leftrightarrow & B \cap M(i,j) = \emptyset \end{array}$$

para todo $a \in U$ y $B \subseteq A$, lo que nos lleva a poder definirlas del siguiente modo:

$$\begin{array}{rcl} Ind(B) & = & \{(i,j) \in U \times U \mid B \cap M(i,j) = \emptyset\} \\ M(i,j) & = & \{a \in A \mid (i,j) \notin Ind(\{a\})\} \end{array}$$

Así, un subconjunto de atributos $B \subseteq A$ puede discernir una pareja de objetos $i,j \in U$ si $B \cap M(i,j) \neq \emptyset$

Ejemplo 2. Vamos a calcular la matriz de discernibilidad y, de ahí, los reductos asociados al sistema de información del Ejemplo 1. Vamos a calcular a modo de ejemplo los elementos de la primera columna, es decir, la relación de indiscernibilidad del primer objeto con los demás.

Tal y como hemos visto en las características de la matriz de discernibilidad $M(1,1) = \emptyset$ y la relación es simétrica, luego estaremos obteniendo también los elementos de la primera fila:

$$\begin{array}{rcl} M(1,1) & = & \emptyset \\ M(1,2) & = & \{a,d\} \\ M(1,3) & = & \{a,b,c,e\} \\ M(1,4) & = & \{a,b\} \\ M(1,5) & = & \{a,c\} \\ M(1,6) & = & \{d,e\} \\ M(1,7) & = & \{b,e\} \end{array}$$

Repitiendo el proceso con cada uno de los objetos y teniendo en cuenta las propiedades, obtenemos la siguiente matriz de discernibilidad, donde los elementos de la diagonal son el conjunto vacío y $M(i,j) = M(j,i)$:

$$\begin{bmatrix} & & & & & & \\ \{a,d\} & & & & & & \\ \{a,b,c,e\} & \{b,c,d,e\} & & & & & \\ \{a,b\} & \{b,d\} & \{c,e\} & & & & \\ \{a,c\} & \{a,c,d\} & \{a,b,c,e\} & \{a,b,c\} & & & \\ \{d,e\} & \{a,d,e\} & \{a,b,c,d\} & \{a,b,d,e\} & \{a,c,d,e\} & & \\ \{b,e\} & \{a,b,d,e\} & \{a,c\} & \{a,e\} & \{a,b,c,e\} & \{b,d\} & \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, un reducto es una reducción en los atributos en función de que los objetos sean discernibles o no. Lo cual nos presenta una nueva cuestión: ¿podríamos crear una clasificación de los atributos en función de los reductos? La siguiente definición responde a esta pregunta.

Definición 4.2.3. Sea $\mathbb{A} = (U, A)$ un sistema de información y $\{R_i \mid i \in \Lambda$ el conjunto de los reductos que obtenemos de dicho sistema, donde Λ es un conjunto de índices. Entonces, podemos clasificar los atributos del siguiente modo:

1. **Atributos absolutamente necesarios (ANA)**, o atributos del core, son aquellos atributos pertenecientes a todos y cada uno de los reductos, es decir, pertenecientes a la interesección de los reductos:
$$\mathrm{ANA}(\mathbb{A}) = \{b \in A \mid b \in (\cap_{i\in\Lambda} R_i)\}$$

2. **Atributos relativamente necesarios (RNA)**: Son aquellos atributos que aunque están en los reductos pero no en todos ellos; por lo tanto, podemos calcularlo mediante
$$\mathrm{RNA}(\mathbb{A}) = \{c \in A \mid c \in (\cup_{i\in\Lambda} R_i - \cap_{i\in\Lambda} R_i)\}$$

3. **Atributos absolutamente innecesarios (AUA)**: Son aquellos atributos que no pertenecen a la unión de los reductos calculados, o equivalentemente, que no aparecen en ninguno de los reductos; es decir,
$$\mathrm{AUA}(\mathbb{A}) = \{d \in A \mid (A - \cap_{i\in\Lambda} R_i)\}$$

Una herramienta para calcular los reductos de un sistema de información viene dada por la función de discernibilidad.

Definición 4.2.4. Dado el sistema de información $\mathbb{A} = (U, A)$ y su matriz de discernibilidad asociada M, la función de discernibilidad de M se define como:

$$f_{\mathbb{A}}(M) = \bigwedge \left\{ \bigvee (M(i,j)) \mid \text{ para todo } i,j \in U, M(i,j) \neq \emptyset \right\}$$

Podemos observar que la función de discernibilidad de una matriz M es una forma normal conjuntiva de la lógica proposicional, considerando como alfabeto el conjunto de objetos U.

Ejemplo 3. Vamos a calcular los reductos, la función de discernibilidad y la clasificación de atributos del Ejemplo 1.

En primer lugar, obtenemos la función de discernibilidad:

$$\begin{aligned}
f_{\mathbb{A}}(M) &= \bigwedge \left\{ \bigvee (M(i,j)) \mid \text{ para todo } i,j \in U, M(i,j) \neq \emptyset \right\} \\
&= (a \vee d) \wedge (a \vee b \vee c \vee e) \wedge (b \vee c \vee d \vee e) \wedge (a \vee b) \wedge (b \vee d) \wedge (c \vee e) \wedge (a \vee c) \wedge \\
&\quad\; (a \vee c \vee d) \wedge \wedge (d \vee e) \wedge (a \vee d \vee e) \wedge (a \vee b \vee c \vee d) \wedge (a \vee b \vee c) \wedge (a \vee b \vee d \vee e) \wedge \\
&\quad\; (a \vee c \vee d \vee e) \wedge (b \vee e) \wedge (a \vee e) \\
&= (a \vee d) \wedge (a \vee b) \wedge (b \vee d) \wedge (c \vee e) \wedge (a \vee c) \wedge (d \vee e) \wedge (b \vee e) \wedge (a \vee e) \\
&= (a \vee d \vee e) \wedge (a \vee b \vee e) \wedge (a \vee b \vee c \vee d) \wedge (b \vee c \vee d \vee e)
\end{aligned}$$

A partir de $f_{\mathbb{A}}(M)$, podemos obtener su forma normal conjuntiva reducida de la lógica proposicional, considerando como alfabeto el conjunto de objetos U.

$$f_{\mathbb{A}}(M) = (a \vee d) \wedge (a \vee b) \wedge (b \vee d) \wedge (c \vee e) \wedge (a \vee c) \wedge (d \vee e) \wedge (b \vee e) \wedge (a \vee e)$$

Por lo tanto, podemos afirmar que los objetos de U pueden distinguirse si consideramos, al menos, un atributo de cada una de las cláusulas de la forma normal disyuntiva anterior. Consecuentemente, la forma normal disyuntiva reducida nos aporta tal selección.

$$f_{\mathbb{A}}(M) = (a \wedge d \wedge e) \vee (a \wedge b \wedge e) \vee (a \wedge b \wedge c \wedge d) \vee (b \wedge c \wedge d \wedge e)$$

Por lo tanto, tenemos cuatro reductos distintos:

$$\begin{array}{rclcrcl}
R_1 & = & \{a, d, e\} & \qquad & R_3 & = & \{a, b, c, d\} \\
R_2 & = & \{a, b, e\} & \qquad & R_4 & = & \{b, c, d, e\}
\end{array}$$

Veamos ahora la clasificación de los atributos en función de los reductos:

1. Atributos absolutamente necesarios: Por la definición tenemos que

$$\text{ANA}(\mathbb{A}) = \{a_j \in A \mid b \in (\cap_{i \in \Lambda} R_i))\} = \emptyset$$

2. Atributos relativamente necesarios: Son aquellos atributos que no están en todos los reductos a la vez,

$$\text{RNA}(\mathbb{A}) = \{a_j \in A \mid c \in (\cup_{i \in \Lambda} R_i - \cap_{i \in \Lambda} R_i)\} = \{a, b, c, d, e\}$$

3. Atributos absolutamente innecesarios: Como son aquellos atributos que no aparecen en ningún reducto, tenemos que

$$\text{AUA}(\mathbb{A}) = \{a_j \in A \mid (A - \cap_{i \in \Lambda} R_i)\} = \emptyset$$

Ejemplo 4. Sea el sistema de información $\mathbb{A} = (U, A)$, donde el conjunto de los objetos es $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y $A = \{\text{Outlook,Temperature, Humidity, Wind}\}$ es el conjunto de los atributos. Ambos conjuntos se relacionan de acuerdo a la siguiente tabla

U	Outlook	Temperature	Humidity	Wind
1	Sunny	Hot	High	Weak
2	Sunny	Hot	High	Strong
3	Overcast	Hot	High	Weak
4	Rain	Mild	High	Weak
5	Rain	Cold	Normal	Weak
6	Rain	Cold	Normal	Strong

Calculemos ahora la matriz de discernibilidad. Teniendo en cuenta que el cardinal del conjunto de objetos es 6, obtenemos una matriz cuadrada 6×6, simétrica y cuyos elementos diagonales son el conjunto vacío. Vamos a calcular $M(1,j)$, con $j \in U$:

$$\begin{array}{rcl} M(1,1) &=& \emptyset \\ M(1,2) &=& \{W\} \\ M(1,3) &=& \{O\} \\ M(1,4) &=& \{O,T\} \\ M(1,5) &=& \{O,T,H\} \\ M(1,6) &=& \{O,T,H,W\} \end{array}$$

Actuando de forma análoga con el resto de los objetos de U, obtenemos la siguiente matriz de discernibilidad:

$$\begin{bmatrix} \emptyset & & & & & \\ \{W\} & \emptyset & & & & \\ \{O\} & \{O,W\} & \emptyset & & & \\ \{O,T\} & \{O,T,W\} & \{O,T\} & \emptyset & & \\ \{O,T,H\} & \{O,T,H,W\} & \{O,T,H\} & \{T,H\} & \emptyset & \\ \{O,T,H,W\} & \{O,T,H\} & \{O,T,H,W\} & \{T,H,W\} & \{W\} & \emptyset \end{bmatrix}$$

Apoyándonos en la matriz de discernibilidad, vamos ahora a construir la función de discernibilidad y su forma normal disyuntiva reducida asociada:

$$\begin{aligned} f(M) &= (O) \wedge (W) \wedge (O \vee T) \wedge (O \vee T \vee H) \wedge (O \vee T \vee H \vee W) \wedge (O \vee W) \wedge \\ &\quad \wedge (T \vee H) \wedge (T \vee H \vee W) \\ &= (O \wedge T \wedge W) \vee (O \wedge H \wedge W) \end{aligned}$$

Entonces, obtenemos dos reductos

$$R_1 \;=\; \{O,T,W\} \qquad R_2 \;=\; \{O,H,W\}$$

Realicemos ahora, la clasificación de los atributos en función de los reductos anteriormente calculados.

1. $\mathrm{ANA}(\mathbb{A}) = \{O,W\}$

2. $\mathrm{RNA}(\mathbb{A}) = \{T,H\}$

3. $\mathrm{AUA}(\mathbb{A}) = \emptyset$

4.3. Birreductos de información

Como se comentó anteriormente, además de realizar una reducción en el conjunto de los atributos asociado a un sistema de información, es muy importante también, con vista a las aplicaciones, el reducir el conjunto de atributos y el de objetos de forma simultánea.

Definición 4.3.1. Sea $\mathbb{A} = (U, A)$ un sistema de información. El par (B, X), donde $B \subseteq A$ y $X \subseteq U$, se denomina *birreducto de información*, si y sólo si B discierne todo par de objetos $i, j \in X$ y satisface las siguientes propiedades:

1. No existe un subconjunto $C \subsetneq B$ tal que C discierna todo par de objetos en X
2. No hay un superconjunto $X \subsetneq Y$ tal que B discierna todo par de objetos en Y

Por tanto, debemos modificar la función de discernibilidad para que recoja el cambio de punto de vista de la reducción deseada.

Definición 4.3.2. Dado el sistema de información $\mathbb{A} = (U, A)$ y su matriz de discernibilidad asociada M, la función de discernibilidad de M se define como:

$$f_{\mathbb{A}}(M) = \bigwedge \left\{ i \vee j \vee \bigvee (M(i,j)) \mid \text{ para todo } i, j \in U, M(i,j) \neq \emptyset \right\}$$

Del mismo modo a como se estudió para los reductos, la forma normal disyuntiva reducida de $f_{\mathbb{A}}(M)$ aportará los distintos birreductos que se obtienen.

Ejemplo 5. Consideremos la tabla de información del Ejemplo 1 y su matriz de discernibilidad calculada en el Ejemplo 3. Por la definición de la función de discernibilidad obtenemos que:

$$\begin{aligned} f_{\mathbb{A}}(M) = {} & (1 \vee 2 \vee a \vee d) \wedge (1 \vee 3 \vee a \vee b \vee c \vee e) \wedge (1 \vee 4 \vee a \vee b) \wedge (1 \vee 5 \vee a \vee c) \wedge (1 \vee 6 \vee a \vee c) \wedge \\ & \wedge (1 \vee 7 \vee b \vee e) \wedge (2 \vee 3 \vee b \vee c \vee d \vee e) \wedge (2 \vee 4 \vee b \vee d) \wedge (2 \vee 5 \vee a \vee c \vee d) \wedge \\ & \wedge (2 \vee 6 \vee a \vee d \vee e) \wedge (2 \vee 7 \vee a \vee b \vee d \vee e) \wedge (3 \vee 4 \vee c \vee e) \wedge (3 \vee 5 \vee a \vee b \vee c \vee e) \wedge \\ & \wedge (3 \vee 6 \vee a \vee b \vee c \vee d) \wedge (3 \vee 7 \vee a \vee c) \wedge (4 \vee 5 \vee a \vee b \vee c) \wedge (4 \vee 6 \vee a \vee b \vee d \vee e) \wedge \\ & \wedge (4 \vee 7 \vee a \vee e) \wedge (5 \vee 6 \vee a \vee c \vee d \vee e) \wedge (5 \vee 7 \vee a \vee b \vee c \vee e) \end{aligned}$$

A partir de la cual se obtiene la forma normal disyuntiva reducida:

$$\begin{aligned} f_{\mathbb{A}}(M) = {} & (1 \wedge 2 \wedge 3 \wedge 4 \wedge 5) \vee (1 \wedge 2 \wedge 3 \wedge a) \vee (1 \wedge 2 \wedge 4 \wedge a) \vee (1 \wedge 2 \wedge a \wedge c) \vee \\ & \vee (1 \wedge 2 \wedge a \wedge e) \vee (1 \wedge 3 \wedge 4 \wedge 5 \wedge d) \vee (1 \wedge 3 \wedge 4 \wedge 7 \wedge d) \vee (1 \wedge 3 \wedge 4 \wedge a \wedge d) \vee \\ & \vee (1 \wedge 3 \wedge 4 \wedge b \wedge d) \vee (1 \wedge 3 \wedge 4 \wedge c \wedge d) \vee (1 \wedge 3 \wedge 4 \wedge d \wedge e) \end{aligned}$$

Por lo tanto, obtenemos 11 birreductos de información:

$D_1 = \{\{\}, \{6,7\}\}$
$D_2 = \{\{a\}, \{4,5,6,7\}\}$
$D_3 = \{\{a\}, \{3,5,6,7\}\}$
$D_4 = \{\{a\}, \{3,4,5,6,7\}\}$
$D_5 = \{\{a,e\}, \{3,4,5,6,7\}\}$
$D_6 = \{\{d\}, \{2,6,7\}\}$
$D_7 = \{\{d\}, \{2,5,6\}\}$
$D_8 = \{\{a,d\}, \{2,5,6,7\}\}$
$D_9 = \{\{b,d\}, \{2,5,6,7\}\}$
$D_{10} = \{\{c,d\}, \{2,5,6,7\}\}$
$D_{11} = \{\{d,e\}, \{2,5,6,7\}\}$

Capítulo 5

Reductos y birreductos de decisión

En las aplicaciones es usual considerar un atributo que nos indica la decisión que debemos tomar a partir del resto de atributos, a estos sistemas se les llama sistema de decisión, en los que también es importante el estudio de reductos y birreductos.

5.1. Conceptos previos.

Un sistema de decisión se denota por $\mathbb{A} = (U, A \cup \{d\})$, donde U es un conjunto de objetos, A es un conjunto de atributos y $d \notin A$ es una decisión sobre los atributos. Para referirnos a los elementos de U, como anteriormente, usaremos los números ordinales $i \in \{1, 2, \ldots, |U|\}$, donde $|U|$ es el cardinal del conjunto de objetos. A los atributos $a \in A$ los trataremos como funciones

$$a : U \rightarrow V_a$$

donde V_a es el dominio de a. Los valores $v_d \in V_d$ corresponden a las clases de decisión que se obtienen usando los valores asociados a los atributos en A.

Ejemplo 6. Cosideremos el sistema de decisión $\mathbb{A} = (U, A \cup \{d\})$, donde el conjunto de objetos es $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, el conjunto de atributos es $A = \{$Outlook, Temp., Humid., Wind$\}$ y la relación entre ambos viene dada por la siguiente tabla:

	Outlook	Temp.	Humid.	Wind	Sport?
1	sunny	hot	high	weak	no
2	sunny	hot	high	strong	no
3	overcast	hot	high	weak	yes
4	rain	mild	high	weak	yes
5	rain	cool	normal	weak	yes
6	rain	cool	normal	strong	no

Así, obtenemos cuatro funciones asociadas a cada uno de los atributos, cuyos dominios son:

$$V_O = \{\text{sunny, overcast, rain}\} \quad V_T = \{\text{hot,mild,cool}\}$$
$$V_H = \{\text{high,normal}\} \quad V_W = \{\text{weak,strong}\}$$

5.2. Reductos de decisión

Definición 5.2.1. Decimos que $B \subset A$ es un **reducto de decisión** para $\mathbb{A} = (U, A \cup \{d\})$ si y sólo si es un subconjunto irreducible tal que para cada pareja $i, j \in U$ se satisface que $d(i) \neq d(j)$ y se disciernen por B.

Definición 5.2.2. Dado un sistema de decisión $\mathcal{A} = (U, A \cup \{d\})$, su **matriz de discernibilidad** $M = (M(i,j))$ es una matriz de tamaño $|U| \times |U|$, donde el elemento $M(i,j)$ para cada par de objetos (i,j) se define del siguiente modo:

$$M(i,j) = \{a \in A \mid [I_a(i) \neq I_a(j)] \wedge [I_D(i) \neq I_D(j)]\}$$

Del mismo modo que en el caso del sistema de información, la matriz de discernibilidad es simétrica y los elementos de la diagonal son el conjunto vacío. Pero, además, podemos encontrarnos otra situación en la que el conjunto resultante sea el conjunto vacío, esto es, si dos elementos tienen el mismo atributo de decisión.

Además, la función de discernibilidad se define de forma análoga.

Ejemplo 7. Vamos a calcular los reductos para nuestro sistema de decisión presentada en el Ejemplo 6. Primero, calcularemos los elementos de la matriz de discernibilidad teniendo en cuenta la definición de la misma y las propiedades de la relación de discernibilidad. Entonces, obtenemos que:

$$\begin{array}{rcll} M(1,2) = M(1,6) = M(2,6) & = & \emptyset & \text{puesto que} \quad I_D(1) = I_D(2) = I_D(6) = \text{No} \\ M(3,4) = M(3,5) = M(4,5) & = & \emptyset & \text{puesto que} \quad I_D(3) = I_D(4) = I_D(5) = \text{Yes} \end{array}$$

Por otro lado, tenemos por la propiedad reflexiva y la definición de los elementos de la matriz, que

$$M(1,1) = M(2,2) = M(3,3) = M(4,4) = M(5,5) = M(6,6) = \emptyset$$

Teniendo en cuento todos estos datos, vemos que sólo tendríamos que calcular 9 elementos de la matriz M:

$$\begin{array}{lll} M(1,3) = \{O\} & M(2,3) = \{O,W\} & M(3,6) = \{O,T,H,W\} \\ M(1,4) = \{O,T\} & M(2,4) = \{O,T,W\} & M(4,6) = \{T,H,W\} \\ M(1,5) = \{O,T,H\} & M(2,5) = \{O,T,H,W\} & M(5,6) = \{W\} \end{array}$$

Consecuentemente, la matriz de discernibilidad nos queda del siguiente modo:

$$\begin{bmatrix} \emptyset & & & & & \\ \emptyset & \emptyset & & & & \\ \{O\} & \{O,W\} & \emptyset & & & \\ \{O,T\} & \{O,T,W\} & \emptyset & \emptyset & & \\ \{O,T,H\} & \{O,T,H,W\} & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \\ \emptyset & \emptyset & \{O,T,H,W\} & \{T,H,W\} & \{W\} & \emptyset \end{bmatrix}$$

Vamos a construir, a continuación, la función de discernibilidad y su forma normal disyuntiva reducida asociada, haciendo uso de la matriz de discernibilidad anteriormente calculada:

$$f(M) = (O) \wedge (O \vee T) \wedge (O \vee T \vee H) \wedge (O \vee W) \wedge (O \vee T \vee H \vee W) \wedge (T \vee H \vee W) \wedge (W) =$$
$$= (O \wedge T \wedge W) \vee (O \wedge H \wedge W)$$

De donde obtenemos dos reductos de decisión para el sistema de decisión $\mathcal{A}$:

$$\begin{aligned} R_1 &= \{O, T, W\} \\ R_2 &= \{O, H, W\} \end{aligned}$$

Una vez que tenemos los reductos ya calculados, podemos realizar la clasificación de los atributos:

1. $\text{ANA}(\mathbb{A}) = \{O, W\}$
2. $\text{RNA}(\mathbb{A}) = \{T, H\}$
3. $\text{AUA}(\mathbb{A}) = \emptyset$

Ejemplo 8. Teniendo en cuenta la tabla de información presentada en el Ejemplo 1, añadimos una columna nueva donde presentaremos el atributo decisión y de la que obtendremos el reducto de decisión. Por tanto, consideraremos el sistema de decisión $\mathbb{A} = (U, A \cup \{d\})$, donde el conjunto de objetos es $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, el conjunto de atributos es $A = \{\text{temperatura, humedad, viento, fertilizante, pesticida, ventilación}\}$, y cuyas funciones tienen como conjunto de valores:

$$\begin{aligned} V_a &= \{high, middle, low\} & V_d &= \{fert1, fert2, fert3\} \\ V_b &= \{high, middle\} & V_e &= \{pes1, pes2\} \\ V_c &= \{strong, middle, weak\} & V_D &= \{high, low\} \end{aligned}$$

U	a	b	c	d	e	D
1	high	middle	middle	fert 1	pes1	high
2	middle	middle	middle	fert 2	pes1	high
3	middle	high	weak	fert 1	pes2	high
4	middle	high	middle	fert 1	pes1	low
5	low	middle	strong	fert 1	pes1	low
6	high	middle	middle	fert 3	pes2	low
7	high	high	middle	fert 1	pes2	low

Primeramente, calculamos la matriz de discernibilidad asociada a dicha tabla de decisión. En este caso, existen dos formas de obtener el conjunto vacío como elemento de la matriz de discernibilidad, para todo $i, j \in U$:

1. Por la propiedad reflexiva de la relación de discernibilidad $M(i, j) = \emptyset$

2. Por la definición de la matriz de discernibilidad, si $I(i) = I(j)$ entonces $M(i,j) = \emptyset$

Por lo tanto, tendríamos que:

$$M(1,1) = M(2,2) = M(3,3) = M(4,4) = M(5,5) = M(6,6) = M(7,7) = \emptyset$$

por la primera de las razones. Mientras que:

$$\begin{array}{l} M(1,2) = M(1,3) = M(2,3) = \emptyset \\ M(4,5) = M(4,6) = M(4,7) = M(5,6) = M(5,7) = M(6,7) = \emptyset \end{array}$$

ya que $1,2,3$ tienen el mismo atributo de decisión "high", y $4,5,6,7$ tienen el atributo de decisión "low". Consecuentemente, la matriz de discernibilidad queda como sigue:

$$\begin{bmatrix} \emptyset & & & & & & \\ \emptyset & \emptyset & & & & & \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & & & & \\ \{a,b\} & \{b,d\} & \{c,e\} & \emptyset & & & \\ \{a,c\} & \{a,c,d\} & \{a,b,c,e\} & \emptyset & \emptyset & & \\ \{d,e\} & \{a,d,e\} & \{a,b,c,d\} & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \\ \{b,e\} & \{a,b,d,e\} & \{a,c\} & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \end{bmatrix}$$

Calculemos hora la función de discernibilidad y su forma normal disyuntiva reducida asociada:

$$\begin{aligned} f_{\mathbb{A}}(M) &= \bigwedge \left\{ \bigvee (M(i,j)) \mid \text{ para todo } i,j \in U, M(i,j) \neq \emptyset \right\} \\ &= (a \vee b) \wedge (b \vee d) \wedge (c \vee e) \wedge (a \vee c) \wedge (a \vee c \vee d) \wedge (a \vee b \vee c \vee e) \wedge (d \vee e) \wedge \\ &\quad \wedge (a \vee d \vee e) \wedge (a \vee b \vee c \vee d) \wedge (b \vee e) \wedge (a \vee b \vee d \vee e) \\ &= (a \wedge b \wedge d) \vee (a \wedge c \wedge d) \vee (a \wedge d \wedge e) \vee (a \wedge b \wedge e) \vee (a \wedge b \wedge c) \vee \\ &\quad \vee (b \wedge c \wedge d) \vee (b \wedge c \wedge e) \end{aligned}$$

Por tanto, se obtienen siete reductos de decisión:

$$\begin{array}{ll} R_1 = \{a,b,d\} & R_2 = \{a,c,d\} \\ R_3 = \{a,d,e\} & R_4 = \{a,b,e\} \\ R_5 = \{a,b,c\} & R_6 = \{b,c,d\} \\ R_7 = \{b,c,e\} & \end{array}$$

Veamos ahora cómo queda la clasificación de los atributos en función de los reductos:

1. $\text{ANA}(\mathbb{A}) = \{a \in A \mid a \cap_{i \in \Lambda} R_i\} = \emptyset$

2. $\text{RNA}(\mathbb{A}) = \{a_j \in A \mid c \in (\cup_{i \in \Lambda} R_i - \cap_{i \in \Lambda} R_i)\} = \{a,b,c,d,e\}$

3. $\text{AUA}(\mathbb{A}) = \{a_j \in A \mid (A - \cap_{i \in \Lambda} R_i)\} = \emptyset$

5.3. Birreductos de decisión

En esta sección estudiamos los birreductos en sistemas de decisión.

Definición 5.3.1. Sea $A = (U, A \cup \{d\})$ un sistema de decisión. Un par (B, X), donde $B \subset A$ y $X \subset U$, es un **birreducto de decisión** si y sólo si B discierne todo par $i, j \in X$ donde $d(i) \neq d(j)$ y mantiene las siguientes propiedades:

1. No hay un subconjunto de B, $C \subsetneq B$ tal que C discierne todo par $i, j \in X$ donde $d(i) \neq d(j)$.
2. No existe un superconjunto de X, $X \subsetneq Y$ tal que B discierne todo par $i, j \in Y$ donde $d(i) \neq d(j)$.

Teorema 5.3.1. *Sea $\mathbb{A} = (U, A \cap \{d\})$ un sistema de decisión y la forma normal conjuntiva*

$$\tau_{\mathbb{A}}^{bir} = \bigwedge_{i,j \in U | i<j, d(i) \neq d(j)} \left(i \vee j \vee \bigvee \{a \in A \mid a(i) \neq a(j)\} \right)$$

donde los elementos de $U = \{1, \dots, |U|\}$ y de A son los símbolos proposicionales del lenguaje.

Un par arbitrario (B, X), $B \subseteq A$, $X \subseteq U$, es un birreducto de decisión, si y sólo si el cubo $\bigwedge_{a \in B} a \wedge \bigwedge_{i \notin X} i$ es un cubo de la FNDR de $\tau_{\mathbb{A}}^{bir}$.

Demostración. Antes de nada (First of all), necesitamos los conjuntos auxiliares siguientes: Dado $i, j \in U$ y $X \subseteq U$, definimos

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \{a \in A \mid a(i) \neq a(j) \text{ y } d(i) \neq d(j)\} \\ D_X &= \{i \vee j \vee \textstyle\bigvee_{a \in A_{ij}} a \mid i, j \in X, i < j, d(i) \neq d(j)\} \\ D_{X^*} &= \{i \vee j \vee \textstyle\bigvee_{a \in A_{ij}} a \mid i \notin X \text{ or } j \notin X, i < j, d(i) \neq d(j)\} \end{aligned}$$

y denotamos $\wedge D_X$ a la forma normal conjuntiva (FNC) que se obtiene al considerar la conjunción de todas las cláusulas de D_X. Observamos fácilmente que

$$\tau_{\mathbb{A}}^{bir} = (\wedge D_X) \wedge (\wedge D_{X^*}) = \wedge D_U$$

Supongamos en primer lugar que (B, X), con $B \subseteq A$, $X \subseteq U$ es un birreducto de decisión, por lo tanto, se cumplen las siguientes propiedades:

1. B discierne todo par $i, j \in X$, cuando $d(i) \neq d(j)$.
2. No existe un subconjunto $C \subsetneq B$ tal que C discierne todo par $i, j \in X$, donde $d(i) \neq d(j)$.
3. No existe un superconjunto $X \subsetneq Y$ tal que B discierne todo par $i, j \in Y$, donde $d(i) \neq d(j)$.

Ahora vamos a considerar un elemento de cada una de las cláusulas de $\tau_{\mathbb{A}}^{bir}$, en función de los objetos de U. Por tanto, para cada $i, j \in U$, con $i < j$ y $d(i) \neq d(j)$, debemos distinguir tres posibilidades:

1. Que $i, j \in X$. En este caso, por la propiedad (1), obtenemos que existe un $b \in B$ tal que $b \in A_{ij}$. Entonces, existe al menos, un $b \in B$ en toda cláusula de D_X. Por lo tanto, elegimos uno de cada una de ellas obteniendo: $\bigwedge_{b \in B' \subseteq B} b$.

2. Si $i \in X$, $j \notin X$, consideramos el elemento j de la cláusula $i \vee j \vee \bigvee_{a \in A_{ij}} a$ de D_{X^*}.

3. Si $i, j \notin X$, se elige el elemento i o j de la cláusula $i \vee j \vee \bigvee_{a \in A_{ij}} a$, también de D_{X^*}.

De los dos últimos casos obtenemos el cubo: $\bigwedge_{i \in Y' \subseteq X^c} i$. Por lo tanto, hemos considerado un cubo de la FND de $\wedge D_U$: $\bigwedge_{b \in B' \subseteq B} b \wedge \bigwedge_{i \in Y' \subseteq X^c} i$. Veamos ahora que $B' = B$ y que $Y' = X^c$.

Supongamos, primeramente, que $B' \subsetneq B$, entonces obtenemos que para todo $i, j \in X$, con $d(i) \neq d(j)$, existe $b \in B'$ tal que $b' \in A_{ij}$. Por tanto, B' es un subconjunto de B que distingue todos los pares $i, j \in X$, donde $d(i) \neq d(j)$, lo cual contradice la propiedad (2) que debe cumplir un birreducto de decisión. Por tanto, $B' = B$.

Consideremos ahora que $Y' \subsetneq X^c$, es decir, $X \subsetneq Y'^c$, y comprobemos si B distingue más objetos. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $j \notin X$, y que j no está en Y'. Tenemos en cuenta, entonces, el conjunto $X \cup \{j\}$. Puesto que B distingue a todos los elementos de X, si $d(i) = d(j)$, para todo $i \in X$ entonces B también distingue a todos los elementos de $X \cup \{j\}$, obteniendo una contradicción con la propiedad (3) del birreducto de decisión. Por otro lado, si existe $i \in X$ tal que $d(i) \neq d(j)$, entonces estamos en el Caso (2) y, por tanto, $j \in Y'$, obteniendo una contradicción. Por tanto, si $j \notin X$ obtenemos que $j \in Y'$.

Consecuentemente, $\bigwedge_{b \in B} \wedge \bigwedge_{i \notin X} i$ es un cubo de la FND de $\tau_{\mathbb{A}}^{bir}$.

Veamos ahora el otro sentido de la implicación, suponiendo que $\bigwedge_{a \in B} a \wedge \bigwedge_{i \notin X} i$ es un cubo de la FNDR de $\tau_{\mathbb{A}}^{bir} = \wedge D_U$. Dados $i, j \in X$ satisfaciendo $d(i) \neq d(j)$, existe una cláusula en D_U con la forma: $i \vee j \vee A_{ij}$. Puesto que $\bigwedge_{a \in B} a \wedge \bigwedge_{i \notin X} i$ verifica la cláusula $i \vee j \vee A_{ij}$ y se sabe que $i, j \in X$, la única forma de que el cubo satisfaga la cláusula es que exista un elemento $a \in A_{ij}$ tal que $a \in B$. Por lo tanto, existe $a \in B$ tal que $a(i) \neq a(j)$. Consecuentemente, B distingue todos los pares $i, j \in X$ tal que $d(i) \neq d(j)$, verificándose la primera propiedad para que (B, X) sea un birreducto de decisión.

Supongamos ahora que existe $C \subsetneq B$ tal que C distingue todo los pares $i, j \in X$ donde $d(i) \neq d(j)$. Entonces $\bigwedge_{a \in C} a \wedge \bigwedge_{i \notin X} i$ sería un cubo de la FND de $\tau_{\mathbb{A}}^{bir}$ y

$$\left(\bigwedge_{a \in C} a \wedge \bigwedge_{i \notin X} i\right) \wedge \left(\bigwedge_{b \in B} b \wedge \bigwedge_{i \notin X} i\right) = \left(\bigwedge_{a \in C} a \wedge \bigwedge_{i \notin X} i\right)$$

Lo cual contradice que $\left(\bigwedge_{b \in B} b \wedge \bigwedge_{i \notin X} i\right)$ es un cubo de la FNDR.
Por otro lado, supongamos que existe un subconjunto $Y \subseteq U$, tal que $X \subsetneq Y$ y que B discierne todos los pares $i, j \in Y$ donde $d(i) \neq d(j)$. Entonces $\bigwedge_{b \in B} b \wedge \bigwedge_{j \notin Y} j$ sería un cubo de la FNDR de $\tau_{\mathbb{A}}^{bir}$ y

$$\left(\bigwedge_{b \in B} b \wedge \bigwedge_{j \notin Y} j\right) \wedge \left(\bigwedge_{b \in B} b \wedge \bigwedge_{i \notin X} i\right) = \left(\bigwedge_{b \in B} b \wedge \bigwedge_{j \notin Y} j\right)$$

Obteniendo así una contradicción con que $\left(\bigwedge_{b \in B} b \wedge \bigwedge_{i \notin X} i\right)$ es un cubo de la FNDR.
Así, (B, X) es un birreducto de decisión. $\square$

Ejemplo 9. Dado el sistema de decisión presentado en el Ejemplo 6 con la tabla de decisión introducida en ese mismo ejemplo, y cuya matriz de discernibilidad se ha calculado en el Ejemplo 7. Calculemos, ahora, los bireductos de decisión asociados a dicho sistema:

$$
\begin{aligned}
\tau_{\mathbb{A}}^{bir} = {} & (1 \vee 3 \vee O) \wedge (1 \vee 4 \vee O \vee T) \wedge (1 \vee 5 \vee O \vee T \vee H) \wedge (2 \vee 3 \vee O \vee W) \wedge \\
& \wedge (2 \vee 4 \vee O \vee T \vee W) \wedge (2 \vee 5 \vee O \vee T \vee H \vee W) \wedge (3 \vee 6 \vee O \vee T \vee H \vee W) \wedge \\
& \wedge (4 \vee 6 \vee T \vee H \vee W) \wedge (5 \vee 6 \vee W) = \\
= {} & (1 \wedge W) \vee (6 \wedge O) \vee (O \wedge W) \vee (1 \wedge 2 \wedge 6) \vee (3 \wedge 4 \wedge 5) \vee (3 \wedge 5 \wedge T) \vee (3 \wedge 6 \wedge T) \vee \\
& \vee (3 \wedge T \wedge W) \vee (4 \wedge 5 \wedge O) \vee (5 \wedge O \wedge T) \vee (5 \wedge O \wedge H) \vee (1 \wedge 3 \wedge 4 \wedge 6 \wedge H)
\end{aligned}
$$

Como consecuencia, obtenemos 12 birreductos de decisión para este sistema de decisión $\mathcal{A}$

$$
\begin{array}{ll}
D_1 = \{\{W\}, \{2,3,4,5,6\}\} & D_7 = \{\{T\}, \{1,2,4,5\}\} \\
D_2 = \{\{O\}, \{1,2,3,4,5\}\} & D_8 = \{\{T,W\}, \{1,2,4,5,6\}\} \\
D_3 = \{\{O,W\}, \{1,2,3,4,5,6\}\} & D_9 = \{\{O\}, \{1,2,3,6\}\} \\
D_4 = \{\{\}, \{3,4,5\}\} & D_{10} = \{\{O,T\}, \{1,2,3,4,6\}\} \\
D_5 = \{\{\}, \{1,2,6\}\} & D_{11} = \{\{O,H\}, \{1,2,3,4,6\}\} \\
D_6 = \{\{T\}, \{1,2,4,6\}\} & D_{12} = \{\{H\}, \{2,5\}\}
\end{array}
$$

Capítulo 6

Birreductos con similaridad

En este capítulo se introduce una primera aproximación al enfoque difuso de la obtención de birreductos en conjuntos rugosos difusos [4, 5, 6, 23, 27].

Las relaciones de similaridad permiten el manejo de información imprecisa, lo cual enriquece el rango de posibles marcos de aplicación de la teoría desarrollada en este trabajo.

Primeramente se recordará el concepto de relación de similaridad y se introducirán las nociones necesarias para incluir ésta en el cálculo de birreductos en sistemas de información y decisión con información imprecisa.

6.1. Definiciones previas

Empezamos recordando la definición de relación de similaridad, que extiende la noción de relación de equivalencia y, por tanto, el concepto de igualdad.

Definición 6.1.1. Dada una función $E\colon X \times X \to [0,1]$, decimos que es una **relación de similaridad** si cumple que:

1. E es reflexiva.
2. E es simétrica.
3. E es transitiva, es decir, $E(a,b) \wedge E(b,c) \leq E(a,c)$

En principio, nuestra relación de similaridad para el conjunto de objetos puede ser cualquiera con dichas propiedades; aunque lo más razonable es tener en cuenta la información que se tiene de los atributos y su conjunto de valores.

Existen distintas posibilidades, pero en este trabajo vamos a considerar una de las más sencillas y a su vez, más operativa:

$$E_U(i,j) = \bigwedge_{a_k \in A} (E_{a_k}(a_k(i), a_k(j)))$$

Definición 6.1.2. Dado un sistema de información $\mathbb{A} = (U, A)$, decimos que dos elementos $i, j \in U$ son **δ-similares** si para todo $a \in A$ se cumple

$$\delta \leq E(a(i), a(j))$$

con $\delta \in [0,1]$. En caso contrario, diremos que son **δ-discordantes**.

Pero, a modo operativo, ¿qué significa ser δ-discordantes? Pues dados dos objetos $i, j \in U$ son δ-discordantes si

$$\{a \mid E(a(i), a(j)) < \delta\} \neq \emptyset$$

Por tanto, cuando estudiemos la definición de la función de discernibilidad τ_A^{bir} no tendremos que tener en cuenta la similaridad de dichos objetos.

6.2. Generalización de reductos y birreductos por similaridades

En esta sección usaremos los conceptos de δ-similares y δ-discordantes para definir la extensión de la función de discernibilidad usando relaciones de similaridad.

6.2.1. Reductos y birreductos de información.

Definición 6.2.1. Sea $\mathbb{A} = (U, A)$ un sistema de información. Decimos que $B \subseteq A$ es un **reducto de información** si y sólo si es un subconjunto irreducible tal que todo par $i, j \in U$ es δ-discordante por B

Definición 6.2.2. Sea $\mathbb{A} = (U, A)$ un sistema de información. El par (B, X), donde $B \subseteq A$ y $X \subseteq U$, se denomina **birreducto de información** si y sólo si todo par de objetos i, j de X son δ-discordantes por B y se cumplen las siguientes propiedades:

1. No hay un subconjunto propio $C \subsetneq B$ tal que todo par $i, j \in X$ son δ-discordantes por C.

2. No hay un superconjunto propio $X \subsetneq Y$ tal que para todo par de Y son δ-discordantes por B.

6.2.2. Reductos y birreductos de decisión.

En este caso vamos a tener que realizar una distinción en función del atributo de decisión, ya que tendremos una definición si el atributo de decisión es booleano o no.

Para atributos de decisión booleanos.

Definición 6.2.3. Sea $\mathbb{A} = (U, A \cup \{d\})$ un sistema de decisión. Decimos que $B \subseteq A$ es un **reducto de decisión** si y sólo si es un subconjunto irreducible tal que todo par $i, j \in U$ es δ-discordante por B donde se satisface que $d(i) \neq d(j)$.

Definición 6.2.4. Sea $\mathbb{A} = (U, A \cup \{d\})$ un sistema de decisión. El par (B, X), donde $B \subseteq A$ y $X \subseteq U$, se denomina **birreducto de decisión** si y sólo si todo $i, j \in X$ son δ-discordantes por B donde $d(i) \neq d(j)$ y mantiene las siguientes propiedades:

1. No existe un subconjunto propio $C \subsetneq B$ tal que todo par $i, j \in X$ son δ-discordantes respecto a C donde $d(i) \neq d(j)$.

2. No hay ningún superconjutno $X \subsetneq Y$ tal que para todo par $i, j \in Y$ son δ-discordantes por B donde $d(i) \neq d(j)$.

Ahora vamos a expresar la función de discernibilidad tanto para reductos como para birreductos de decisión, expresado de diferentes formas para facilitar su cálculo.

Definición 6.2.5. Podemos definir la función de discernibilidad para un reducto de decisión como sigue:

$$\tau_A^{uni} = \bigwedge \left\{ \bigvee \{a \mid E(a(i), a(j)) < \delta\} \mid i, j \in U,\, d(i) \neq d(j) \right\}$$

También podremos denotarlo como:

$$\tau_A^{uni} = \bigwedge_{\{i,j \mid E(d(i),d(j))<\delta\}} \left(\bigvee_{\{a \mid d(i) \neq d(j)\}} a \right)$$

La siguiente definición es la extensión natural de la fórmula de la función de discernibilidad para birreductos de decisión.

Definición 6.2.6. Definimos la función de disceribilidad para un birreducto de decisión del siguiente modo:

$$\tau_A^{bir} = \bigwedge \{ i \vee j \bigvee \{a \mid E(a(i), a(j)) < \delta\} \mid i, j \in U,\, d(i) \neq d(j)\}$$

Esta extensión elimina uno de los objetos cuando son δ-similares, aunque sean claramente distintos, puesto que $\{a \mid E(a(i), a(j)) < \delta\}$ sería vacío e incluiríamos la cláusula $i \vee j$. Esta circunstancia podría evitarse, por ejemplo, optando por una de las dos posibilidades siguientes:

1. **Primera posibilidad**: Al conocer la cota δ y como la δ-discernibilidad es una relación de equivalencia, podemos considerar las clases de equivalencia de cada una de las cotas. Una vez considerada el conjunto cociente, se realizan todos los cálculos con los representantes de clase y se utilizar la fórmula dada en la definición.

2. **Segunda posibilidad**: Considerar una relación de similaridad en los objetos $E_U : U \times U \to [0, 1]$ e incluir en la fórmula otra condición más que elimine dicho problema: $E_U(i, j) < \delta$.

Para el primer caso obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 6.2.1. *Sea $\mathbb{A} = (U, A \cap \{d\})$ un sistema de decisión y la forma normal conjuntiva*

$$\tau_{\mathbb{A}}^{bir} = \bigwedge_{i,j \in U \mid d(i) \neq d(j)} \left(i \vee j \vee \bigvee \{a \in A \mid E(a(i), a(j)) < \delta\} \right)$$

donde los elementos de $U = \{1, , \ldots, |U|\}$ y de A son los símbolos proposicionales del lenguaje.

Un par arbitrario (B, X), $B \subseteq A$, $X \subseteq U$, es un birreducto de decisión, si y sólo si el cubo $\bigwedge_{a \in B} \bar{a} \wedge \bigwedge_{i \notin X} \bar{i}$ es un cubo de la FNDR de $\tau_{\mathbb{A}}^{bir}$.

Demostración. Antes de nada, necesitamos los conjuntos auxiliares siguientes: Dado $i, j \in U$ y $X \subseteq U$, definimos

$$\begin{array}{rcl} A_{ij} & = & \{a \in A \mid E(a(i), a(j)) < \delta \text{ y } d(i) \neq d(j)\} \\ D_X & = & \{i \vee j \vee \bigvee_{a \in A_{ij}} a \mid i, j \in X, i < j, d(i) \neq d(j)\} \\ D_{X^*} & = & \{i \vee j \vee \bigvee_{a \in A_{ij}} a \mid i \notin X \text{ or } j \notin X, i < j, d(i) \neq d(j)\} \end{array}$$

y denotamos $\wedge D_X$ a la forma normal conjuntiva (FNC) que se obtiene al considerar la conjunción de todas las cláusulas de D_X. Observamos fácilmente que

$$\tau_{\mathbb{A}}^{bir} = (\wedge D_X) \wedge (\wedge D_{X^*}) = \wedge D_U$$

Supongamos en primer lugar que (B, X), con $B \subseteq A$, $X \subseteq U$ es un birreducto de decisión, por lo tanto, se cumplen las siguientes propiedades:

1. Todo par $i, j \in X$ son δ-discordantes para B, cuando $d(i) \neq d(j)$.

2. No existe un subconjunto $C \subsetneq B$ tal que todo par $i, j \in X$ son δ-discordante por C, donde $d(i) \neq d(j)$.

3. No existe un superconjunto $X \subsetneq Y$ tal que todo par $i, j \in Y$ son δ-discordantes por B, donde $d(i) \neq d(j)$.

Ahora vamos a considerar un elemento de cada una de las cláusulas de $\tau_{\mathbb{A}}^{bir}$, en función de los objetos de U. Por tanto, para cada $i, j \in U$, con $i < j$ y $d(i) \neq d(j)$, debemos distinguir tres posibilidades:

1. Que $i, j \in X$. En este caso, por la propiedad (1), obtenemos que existe un $b \in B$ tal que $b \in A_{ij}$. Entonces, existe al menos, un $b \in B$ en toda cláusula de D_X. Por lo tanto, elegimos uno de cada una de ellas obteniendo: $\bigwedge_{b \in B' \subseteq B} b$.

2. Si $i \in X$, $j \notin X$, consideramos el elemento j de la cláusula $i \vee j \vee \bigvee_{a \in A_{ij}} a$ de D_{X^*}.

3. Si $i, j \notin X$, se elige el elemento i o j de la cláusula $i \vee j \vee \bigvee_{a \in A_{ij}} a$, también de D_{X^*}.

De los dos últimos casos obtenemos el cubo: $\bigwedge_{i \in Y' \subseteq X^c} i$. Por lo tanto, hemos considerado un cubo de la FND de $\wedge D_U$: $\bigwedge_{b \in B' \subseteq B} b \wedge \bigwedge_{i \in Y' \subseteq X^c} i$. Veamos ahora que $B' = B$ y que $Y' = X^c$.

Supongamos, primeramente, que $B' \subsetneq B$, entonces obtenemos que para todo $i, j \in X$, con $d(i) \neq d(j)$, existe $b \in B'$ tal que $b' \in A_{ij}$. Por tanto, B' es un subconjunto de B en el que todos los pares $i, j \in X$ son δ-discordantes, donde $d(i) \neq d(j)$, lo cual contradice la propiedad (2) que debe cumplir un birreducto de decisión. Por tanto, $B' = B$.

Consideremos ahora que $Y' \subsetneq X^c$, es decir, $X \subsetneq Y'^c$, y comprobemos si B distingue más objetos. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $j \notin X$, y que j no está en Y'. Tenemos en cuenta, entonces, el conjunto $X \cup \{j\}$. Puesto que todos los elementos de X son δ-discordantes por B, si $d(i) = d(j)$, para todo $i \in X$ entonces también todos los elementos de $X \cup \{j\}$ son δ-discordantes por B, obteniendo una contradicción con la propiedad (3) del birreducto de decisión. Por otro lado, si existe $i \in X$ tal que $d(i) \neq d(j)$, entonces estamos en el Caso (2) y, por tanto, $j \in Y'$, obteniendo una contradicción. Por tanto, si $j \notin X$ obtenemos que $j \in Y'$.

Consecuentemente, $\bigwedge_{b \in B} \wedge \bigwedge_{i \notin X} i$ es un cubo de la FND de $\tau_{\mathbb{A}}^{bir}$.

Veamos ahora el otro sentido de la implicación, suponiendo que $\bigwedge_{a \in B} a \wedge \bigwedge_{i \notin X} i$ es un cubo de la FNDR de $\tau_{\mathbb{A}}^{bir} = \wedge D_U$. Dados $i, j \in X$ satisfaciendo $d(i) \neq d(j)$, existe una cláusula en D_U con la forma: $i \vee j \vee A_{ij}$. Puesto que $\bigwedge_{a \in B} a \wedge \bigwedge_{i \notin X} i$ verifica la cláusula $i \vee j \vee A_{ij}$ y se sabe que $i, j \in X$, la única forma de que el cubo satisfaga la cláusula es que exista un elemento $a \in A_{ij}$ tal que $a \in B$. Por lo tanto, existe $a \in B$ tal que $E(a(i), a(j)) < \delta$. Consecuentemente, todos los pares $i, j \in X$ son δ-discordantes por B tal que $d(i) \neq d(j)$, verificándose la primera propiedad para que (B, X) sea un birreducto de decisión.

Supongamos ahora que existe $C \subsetneq B$ tal que todo los pares $i, j \in X$ son δ-discordantes por C, donde $d(i) \neq d(j)$. Entonces $\bigwedge_{a \in C} a \wedge \bigwedge_{i \notin X} i$ sería un cubo de la FND de $\tau_{\mathbb{A}}^{bir}$ y

$$\left(\bigwedge_{a \in C} a \wedge \bigwedge_{i \notin X} i\right) \wedge \left(\bigwedge_{b \in B} b \wedge \bigwedge_{i \notin X} i\right) = \left(\bigwedge_{a \in C} a \wedge \bigwedge_{i \notin X} i\right)$$

Lo cual contradice que $\left(\bigwedge_{b \in B} b \wedge \bigwedge_{i \notin X} i\right)$ es un cubo de la FNDR.
Por otro lado, supongamos que existe un subconjunto $Y \subseteq U$, tal que $X \subsetneq Y$ y que todos los pares $i, j \in Y$ son δ-discordantes por B donde $d(i) \neq d(j)$. Entonces $\bigwedge_{b \in B} b \wedge \bigwedge_{j \notin Y} j$ sería un cubo de la FNDR de $\tau_{\mathbb{A}}^{bir}$ y

$$\left(\bigwedge_{b \in B} b \wedge \bigwedge_{j \notin Y} j\right) \wedge \left(\bigwedge_{b \in B} b \wedge \bigwedge_{i \notin X} i\right) = \left(\bigwedge_{b \in B} b \wedge \bigwedge_{j \notin Y} j\right)$$

Obteniendo así una contradicción con que $\left(\bigwedge_{b \in B} b \wedge \bigwedge_{i \notin X} i\right)$ es un cubo de la FNDR.
Así, (B, X) es un birreducto de decisión. □

Para atributos de decisión no booleanos.

Definición 6.2.7. Sea $\mathbb{A} = (U, A \cup \{d\})$ un sistema de decisión. Decimos que $B \subseteq A$ es un **reducto de decisión** si y sólo si es un subconjunto irreducible tal que todo par $i, j \in U$ es δ-discordante por B donde se satisface que $E(d(i), d(j)) < \delta$.

Podemos definir la función de discernibilidad para un reducto de decisión como sigue:

$$\tau_A^{uni} = \bigwedge \left\{ \bigvee \{a \mid E(a(i), a(j)) < \delta\} \mid i, j \in U,\, E(d(i), d(j)) < \delta \right\}$$

También podremos denotarlo como:

$$\tau_A^{uni} = \bigwedge_{\{i,j \mid E(d(i),d(j)) < \delta\}} \left(\bigvee_{\{a \mid E(d(i),d(j)) < \delta\}} a \right)$$

Definición 6.2.8. Sea $\mathbb{A} = (U, A \cup \{d\})$ un sistema de decisión. El par (B, X), donde $B \subseteq A$ y $X \subseteq U$, se denomina **birreducto de decisión** si y sólo si todo par $i, j \in X$ on δ-discordantes por B donde $E(d(i), d(j)) < \delta$ y mantiene las siguientes propiedades:

1. No existe un subconjunto propio $C \subsetneq B$ tal que todo par $i, j \in X$ son δ-discordantes respecto a C donde $E(d(i), d(j)) < \delta$.

2. No hay ningún superconjutno $X \subsetneq YX$ tal que para todo par $i, j \in Y$ son δ-discordantes por B donde $E(d(i), d(j)) < \delta$.

Definición 6.2.9. Definimos la función de disceribilidad para un birreducto de decisión, con valores no booleanos para el atributo de decisión, del siguiente modo:

$$\tau_A^{bir} = \bigwedge\{i \vee j \bigvee\{a \mid E(a(i), a(j)) < \delta\} \mid i, j \in U,\, E(d(i), d(j)) < \delta\}$$

De la misma forma que ocurre para atributos de decisión booleanos, se puede eliminar uno de los objetos cuando son δ-similares, pudiendo considerar dos casos similares a los contemplados anteriormente.

De forma general, se obtiene el siguiente resultado que extiende el Teorema 5.3.1 y cuya demostración es análoga a la dada para éste.

Teorema 6.2.2. *Sea $\mathbb{A} = (U, A \cap \{d\})$ un sistema de decisión y la forma normal conjuntiva*

$$\tau_{\mathbb{A}}^{bir} = \bigwedge_{i,j \in U \mid E(d(i),d(j)) < \delta} \Big(i \vee j \vee \bigvee\{a \in A \mid E(a(i), a(j)) < \delta\}\Big)$$

donde los elementos de $U = \{1, , \ldots, |U|\}$ y de A son los símbolos proposicionales del lenguaje.

Un par arbitrario (B, X), $B \subseteq A$, $X \subseteq U$, es un birreducto de decisión, si y sólo si el cubo $\bigwedge_{a \in B} \bar{a} \wedge \bigwedge_{i \notin X} \bar{i}$ es un cubo de la FNDR de $\tau_{\mathbb{A}}^{bir}$.

Demostración. Antes de nada, necesitamos los conjuntos auxiliares siguientes: Dado $i, j \in U$ y $X \subseteq U$, definimos

$$\begin{array}{rcl} A_{ij} & = & \{a \in A \mid E(a(i), a(j)) < \delta \text{ y } E(d(i), d(j)) < \delta\} \\ D_X & = & \{i \vee j \vee \bigvee_{a \in A_{ij}} a \mid i, j \in X, i < j, E(d(i), d(j)) < \delta\} \\ D_{X^*} & = & \{i \vee j \vee \bigvee_{a \in A_{ij}} a \mid i \notin X \text{ or } j \notin X, i < j, E(d(i), d(j)) < \delta\} \end{array}$$

y denotamos $\wedge D_X$ a la forma normal conjuntiva (FNC) que se obtiene al considerar la conjunción de todas las cláusulas de D_X. Observamos fácilmente que

$$\tau_{\mathbb{A}}^{bir} = (\wedge D_X) \wedge (\wedge D_{X^*}) = \wedge D_U$$

Supongamos en primer lugar que (B, X), con $B \subseteq A$, $X \subseteq U$ es un birreducto de decisión, por lo tanto, se cumplen las siguientes propiedades:

1. Todo par $i, j \in X$ son δ-discordantes para B, cuando $E(d(i), d(j)) < \delta$.

2. No existe un subconjunto $C \subsetneq B$ tal que todo par $i, j \in X$ son δ-discordante por C, donde $E(d(i), d(j)) < \delta$.

3. No existe un superconjunto $X \subsetneq Y$ tal que todo par $i, j \in Y$ son δ-discordantes por B, donde $E(d(i), d(j)) < \delta$.

Ahora vamos a considerar un elemento de cada una de las cláusulas de $\tau_{\mathbb{A}}^{bir}$, en función de los objetos de U. Por tanto, para cada $i, j \in U$, con $i < j$ y $E(d(i), d(j)) < \delta$, debemos distinguir tres posibilidades:

1. Que $i, j \in X$. En este caso, por la propiedad (1), obtenemos que existe un $b \in B$ tal que $b \in A_{ij}$. Entonces, existe al menos, un $b \in B$ en toda cláusula de D_X. Por lo tanto, elegimos uno de cada una de ellas obteniendo: $\bigwedge_{b \in B' \subseteq B} b$.

2. Si $i \in X$, $j \notin X$, consideramos el elemento j de la cláusula $i \vee j \vee \bigvee_{a \in A_{ij}} a$ de D_{X^*}.

3. Si $i, j \notin X$, se elige el elemento i o j de la cláusula $i \vee j \vee \bigvee_{a \in A_{ij}} a$, también de D_{X^*}.

De los dos últimos casos obtenemos el cubo: $\bigwedge_{i \in Y' \subseteq X^c} i$. Por lo tanto, hemos considerado un cubo de la FND de $\wedge D_U$: $\bigwedge_{b \in B' \subseteq B} b \wedge \bigwedge_{i \in Y' \subseteq X^c} i$. Veamos ahora que $B' = B$ y que $Y' = X^c$.

Supongamos, primeramente, que $B' \subsetneq B$, entonces obtenemos que para todo $i, j \in X$, con $E(d(i), d(j)) < \delta$, existe $b \in B'$ tal que $b' \in A_{ij}$. Por tanto, B' es un subconjunto de B en el que todos los pares $i, j \in X$ son δ-discordantes, donde $E(d(i), d(j)) < \delta$, lo cual contradice la propiedad (2) que debe cumplir un birreducto de decisión. Por tanto, $B' = B$.

Consideremos ahora que $Y' \subsetneq X^c$, es decir, $X \subsetneq Y'^c$, y comprobemos si B distingue más objetos. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $j \notin X$, y que j no está en Y'. Tenemos en cuenta, entonces, el conjunto $X \cup \{j\}$. Puesto que todos los elementos de X son δ-discordantes por B, si $E(d(i), d(j)) < \delta$, para todo $i \in X$ entonces también todos los elementos de $X \cup \{j\}$ son δ-discordantes por B, obteniendo una contradicción con la propiedad (3) del birreducto de decisión. Por otro lado, si existe $i \in X$ tal que $E(d(i), d(j)) < \delta$, entonces estamos en el Caso (2) y, por tanto, $j \in Y'$, obteniendo una contradicción. Por tanto, si $j \notin X$ obtenemos que $j \in Y'$.

Consecuentemente, $\bigwedge_{b \in B} \wedge \bigwedge_{i \notin X} i$ es un cubo de la FND de $\tau_{\mathbb{A}}^{bir}$.

Veamos ahora el otro sentido de la implicación, suponiendo que $\bigwedge_{a \in B} a \wedge \bigwedge_{i \notin X} i$ es un cubo de la FNDR de $\tau_{\mathbb{A}}^{bir} = \wedge D_U$. Dados $i, j \in X$ satisfaciendo $E(d(i), d(j)) < \delta$, existe una cláusula en D_U con la forma: $i \vee j \vee A_{ij}$. Puesto que $\bigwedge_{a \in B} a \wedge \bigwedge_{i \notin X} i$ verifica la cláusula $i \vee j \vee A_{ij}$ y se sabe que $i, j \in X$, la única forma de que el cubo satisfaga la cláusula es que exista un elemento $a \in A_{ij}$ tal que $a \in B$. Por lo tanto, existe $a \in B$ tal que $E(a(i), a(j)) < \delta$. Consecuentemente, todos los pares $i, j \in X$ son δ-discordantes por B tal que $E(d(i), d(j)) < \delta$, verificándose la primera propiedad para que (B, X) sea un birreducto de decisión.

Supongamos ahora que existe $C \subsetneq B$ tal que todo los pares $i, j \in X$ son δ-discordantes por C, donde $E(d(i), d(j)) < \delta$. Entonces $\bigwedge_{a \in C} a \wedge \bigwedge_{i \notin X} i$ sería un cubo de la FND de $\tau_{\mathbb{A}}^{bir}$ y

$$\left(\bigwedge_{a \in C} a \wedge \bigwedge_{i \notin X} i\right) \wedge \left(\bigwedge_{b \in B} b \wedge \bigwedge_{i \notin X} i\right) = \left(\bigwedge_{a \in C} a \wedge \bigwedge_{i \notin X} i\right)$$

Lo cual contradice que $\left(\bigwedge_{b \in B} b \wedge \bigwedge_{i \notin X} i\right)$ es un cubo de la FNDR.
Por otro lado, supongamos que existe un subconjunto $Y \subseteq U$, tal que $X \subsetneq Y$ y que

todos los pares $i, j \in Y$ son δ-discordantes por B donde $E(d(i), d(j)) < \delta$. Entonces $\bigwedge_{b\in B} b \wedge \bigwedge_{j\notin Y} j$ sería un cubo de la FNDR de $\tau_{\mathbb{A}}^{bir}$ y

$$\left(\bigwedge_{b\in B} b \wedge \bigwedge_{j\notin Y} j\right) \wedge \left(\bigwedge_{b\in B} b \wedge \bigwedge_{i\notin X} i\right) = \left(\bigwedge_{b\in B} b \wedge \bigwedge_{j\notin Y} j\right)$$

Obteniendo así una contradicción con que $\left(\bigwedge_{b\in B} b \wedge \bigwedge_{i\notin X} i\right)$ es un cubo de la FNDR. Así, (B, X) es un birreducto de decisión. $\square$

Capítulo 7

Conclusiones y trabajo futuro

Se han estudiado los reductos y birreductos en el ambiente clásico de la teoría de conjuntos rugosos y también considerando relaciones de similaridad. Se ha generalizado la función de discernibilidad, a partir de la cual hemos podido obtener los reductos y birreductos en estos ambientes.

La inclusión de las relaciones de similaridad en la teoría aporta una mayor flexibilidad en estos ambientes, incrementando notablemente el rango de posibles aplicaciones.

Como trabajo futuro seguiremos extendiendo la teoría para poder obtener birreductos en ambientes difusos, como en los conjuntos rugosos difusos [5, 6].

El análisis formal de conceptos es otra teoría que se aplica en la extracción de información de bases de datos, en la que los atributos y objetos juegan un papel diferente y que, por tanto, no admiten una traducción directa de los resultados desarrollados en este trabajo. Consecuentemente, un objetivo a medio plazo será la obtención de birreductos y su interpretación en el marco del análisis formal de conceptos difuso.

Además, aplicaremos la teoría desarrollada en ambas teorías a casos prácticos.

Bibliografía

[1] I. P. A. Burrieza, M. Ojeda and A. Valverde. *Lógica para la Computación. Lógica Clásica Proposicional.* Ágora, 1999.

[2] X. Chen and Q. Li. Construction of rough approximations in fuzzy setting. *Fuzzy Sets and Systems*, 158(23):2641–2653, 2007.

[3] Y. Chen and Y. Yao. A multiview approach for intelligent data analysis based on data operators. *Information Sciences*, 178(1):1–20, 2008.

[4] C. Cornelis, M. De Cock, and A. M. Radzikowska. *Fuzzy Rough Sets: From Theory into Practice*, pages 533–552. John Wiley & Sons, Ltd, 2008.

[5] C. Cornelis, R. Jensen, G. Hurtado, and D. Ślezak. Attribute selection with fuzzy decision reducts. *Information Sciences*, 180:209–224, 2010.

[6] C. Cornelis, J. Medina, and N. Verbiest. Multi-adjoint fuzzy rough sets: Definition, properties and attribute selection. *International Journal of Approximate Reasoning*, 55:412–426, 2014.

[7] Y. Djouadi and H. Prade. Possibility-theoretic extension of derivation operators in formal concept analysis over fuzzy lattices. *Fuzzy Optimization and Decision Making*, 4:287–309, 2011. 10.1007/s10700-011-9106-5.

[8] D. Dubois, F. D. de Saint-Cyr, and H. Prade. A possibility-theoretic view of formal concept analysis. *Fundamenta Informaticae*, 75(1-4):195–213, 2007.

[9] D. Dubois and H. Prade. Putting fuzzy sets and rough sets together. In R. Slowiński, editor, *Intelligent Decision Support*, pages 203–232. Kluwer Academic, Dordrecht, 2004.

[10] I. Düntsch and G. Gediga. Approximation operators in qualitative data analysis. In *Theory and Applications of Relational Structures as Knowledge Instruments*, pages 214–230, 2003.

[11] L. Fariñas del Cerro and H. Prade. Rough sets, twofold fuzzy sets and modal logic—fuzziness in indiscernibility and partial information. In A. D. Nola and A. Ventre, editors, *The Mathematics of Fuzzy Systems*, pages 103–120. Verlag TUV Rheinland, 1986.

[12] B. Ganter and R. Wille. *Formal Concept Analysis: Mathematical Foundation.* Springer Verlag, 1999.

[13] G. Gediga and I. Düntsch. Modal-style operators in qualitative data analysis. In *Proc. IEEE Int. Conf. on Data Mining*, pages 155–162, 2002.

[14] G. Georgescu and A. Popescu. Non-dual fuzzy connections. *Arch. Math. Log.*, 43(8):1009–1039, 2004.

[15] H. Lai and D. Zhang. Concept lattices of fuzzy contexts: Formal concept analysis vs. rough set theory. *International Journal of Approximate Reasoning*, 50(5):695–707, 2009.

[16] J. Li, C. Mei, and Y. Lv. Incomplete decision contexts: Approximate concept construction, rule acquisition and knowledge reduction. *International Journal of Approximate Reasoning*, 54(1):149 – 165, 2013.

[17] G. L. Liu. Generalized rough set over fuzzy lattices. *Information Sciences*, 178(6):1651–1662, 2008.

[18] N. Mac Parthalain and R. Jensen. Simultaneous feature and instance selection using fuzzy-rough bireducts. In *Fuzzy Systems (FUZZ), 2013 IEEE International Conference on*, pages 1–8, July 2013.

[19] J. Medina. Multi-adjoint viewpoint on property/object-oriented concept lattices. In *III Simposio sobre Lógica Fuzzy y Soft Computing (LFSC 2010)*, pages 398–403, 2010.

[20] J. Medina. Towards multi-adjoint property-oriented concept lattices. *Lecture Notes in Artificial Intelligence*, 6401:159–166, 2010.

[21] J. Medina. Multi-adjoint property-oriented and object-oriented concept lattices. *Information Sciences*, 190:95–106, 2012.

[22] J. Medina. Relating attribute reduction in formal, object-oriented and property-oriented concept lattices. *Computers & Mathematics with Applications*, 64(6):1992–2002, 2012.

[23] N. N. Morsi and M. M. Yakout. Axiomatics for fuzzy rough sets. *Fuzzy sets and Systems*, 100:327–342, 1998.

[24] A. Nakamura. Fuzzy rough sets. *Note on Multiple-Valued Logic in Japan*, 9:1–8, 1988.

[25] S. Nanda and S. Majumdar. Fuzzy rough sets. *Fuzzy sets and Systems*, 45:157–160, 1992.

[26] Z. Pawlak. Rough sets. *International Journal of Computer and Information Science*, 11:341–356, 1982.

[27] A. M. Radzikowska and E. E. Kerre. A comparative study of fuzzy rough sets. *Fuzzy Sets and Systems*, 126(2):137–155, 2002.

[28] S. Stawicki and D. Slezak. Recent advances in decision bireducts: Complexity, heuristics and streams. In P. Lingras, M. Wolski, C. Cornelis, S. Mitra, and P. Wasilewski, editors, *Rough Sets and Knowledge Technology*, volume 8171 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 200–212. Springer Berlin Heidelberg, 2013.

[29] R. Wille. Restructuring lattice theory: an approach based on hierarchies of concepts. In I. Rival, editor, *Ordered Sets*, pages 445–470. Reidel, 1982.

[30] Y. Yao and Y. Zhao. Attribute reduction in decision-theoretic rough set models. *Information Sciences*, 178(17):3356–3373, 2008.

[31] Y. Y. Yao. A comparative study of formal concept analysis and rough set theory in data analysis. *Lecture Notes in Artificial Intelligence*, 3066:59–68, 2004.

[32] Y. Y. Yao. Concept lattices in rough set theory. In *Proceedings of Annual Meeting of the North American Fuzzy Information Processing Society (NAFIPS'04)*, pages 796–801, 2004.

[33] Y. Y. Yao and Y. Chen. Rough set approximations in formal concept analysis. In *Transactions on Rough Sets V*, volume 4100 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 285–305, 2006.

[34] L. Zadeh. Fuzzy sets. *Information and Control*, 8:338–353, 1965.